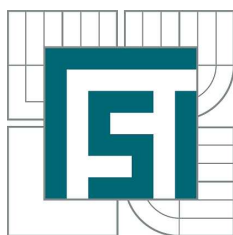


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

# VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ DYNAMICKÝCH PROJEVŮ V KONTAKTU KOLA A KOLEJNICE S OBECNOU GEOMETRIÍ KONTAKTNÍCH POVRCHŮ

NUMERICAL SIMULATIONS OF DYNAMIC LOADS IN WHEEL-RAIL CONTACT WITH SHAPE  
IRREGULARITIES

DISERTAČNÍ PRÁCE  
DOCTORAL THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Ing. RADEK JANDORA

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

prof. Ing. PŘEMYSL JANÍČEK, DrSc.

## Abstrakt

Při provozu kolejových vozidel vznikají na kolech a kolejnicích v důsledku opotřebení nerovnosti. Tyto nerovnosti pak ovlivňují silové působení v kontaktu kola a kolejnice a způsobují jejich další poškozování, způsobují hluk a vibrace a zvyšují riziko vykolejení. Pro studium chování v kontaktu kol a kolejnic byl vytvořen model, který simuluje pohyb zjednodušeného kolejového vozidla po trati a detailně studuje projevy na kontaktních plochách, přičemž uvažuje obecný tvar povrchů v kontaktu. K vyhodnocení kontaktních sil a dalších projevů je v modelu možné použít několika algoritmů, pro provedené studie byl použit algoritmus CONTACT založený na metodě hraničních prvků.

Byly provedeny čtyři studie: jízda vozidla s ploškou na kole nebo se zvlněním po obvodu kola, jízda vozidla po zvlněné kolejnici a průjezd obloukem. První tři zkoumaly chování při existujících nerovnostech, čtvrtá hledala příčinu nerovností, které vznikají v provozu. Výsledky studií s poškozenými povrchy v kontaktu ukázaly, že nejhorším typem nerovností je jakékoli zploštění, protože přináší ztráty kontaktu a následné rázové zatížení. Studie průjezdu obloukem naznačila, že příčinou opotřebení v oblouku, a to zejména oblouku s malým poloměrem, je kmitání vybuzené kvůli nerovnoměrné délce trajektorie vnitřní a vnější kolejnice.

## Summary

During life of railway vehicles, shape irregularities develop on wheels and rails because of wear. The shape irregularities then affect forces in wheel-rail contact and cause further damage of contact surfaces, vibrations and noise and increase risk of derailment.

A numerical simulation of railway vehicle motion with more details on contact surfaces geometry was created to investigate dynamic contact loads in wheel-rail contact. A variety of methods can be used to evaluate forces in rolling contact, the method chosen for this study was algorithm CONTACT based on boundary element method.

Four studies are presented in this papers: contact loads from a wheel with a flat and with a wavy tread pattern, loads on wavy rail and load in a curve. The first three studies investigated effects of existing wear patterns, the last one looked for cause of common wear pattern developing on rails.

Results of the studies with worn components used showed that the worst kind of shape irregularities is a flat present on wheel. It causes loss of contact and following impacts. The study of ride in curve showed that cause of high wear in curves, especially those with small radii, is caused by vibration of wheelset. This vibration is caused by different length of inner and outer rail and wheels travelling along a different path.

## Klíčová slova

Mechanika kontaktu, Kontakt kolo-kolejnice, Valivý kontakt, Kinematika, Dynamika, Tření

## Keywords

Contact mechanics, Wheel-rail contact, Rolling contact, Kinematics, Dynamics, Friction

JANDORA, R. *Výpočtové modelování dynamických projevů v kontaktu kola a kolejnice s obecnou geometrií kontaktních povrchů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 154 s. Vedoucí prof. Ing. Přemysl Janíček, DrSc.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>5</b>
1.1	Problémová situace . . . . .	5
1.2	Vymezení problému a cílů řešení . . . . .	5
1.3	Analýza problému . . . . .	5
1.4	Sestavení systému podstatných veličin . . . . .	6
1.5	Současný stav řešené problematiky . . . . .	8
1.5.1	Souhrnné publikace o dynamice železničního vozidla . . . . .	8
1.5.2	Síly v kontaktu . . . . .	9
1.5.3	Nerovnosti - popis a příčiny vzniku . . . . .	9
1.5.4	Rovinné modely . . . . .	9
1.5.5	Pohyb v oblouku . . . . .	10
1.5.6	Programy pro modelování pohybu tuhých těles . . . . .	10
1.5.7	Prostorové modely . . . . .	10
1.5.8	Současný výzkum problematiky v ČR . . . . .	11
1.6	Příspěvek k rozvinutí problematiky . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Geometrie kol a kolejnic</b>	<b>13</b>
2.1	Konstrukční prvky . . . . .	13
2.1.1	Profily kol . . . . .	13
2.1.2	Profily kolejnic . . . . .	14
2.1.3	Rozchod kol a kolejnic . . . . .	14
2.1.4	Oblouk . . . . .	15
2.1.5	Stoupání a klesání . . . . .	16
2.1.6	Přechodnice a vzestupnice . . . . .	16
2.1.7	Výhybky a křížení . . . . .	17
2.1.8	Dilatační spáry . . . . .	17
2.2	Opotřebení . . . . .	18
2.2.1	Opotřebení kol . . . . .	18
2.2.2	Opotřebení kolejnic . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Teorie výpočtu sil ve valivém kontaktu</b>	<b>23</b>
3.1	Normálové zatížení . . . . .	23
3.1.1	Hertzova teorie kontaktu . . . . .	24
3.1.2	Algoritmus CONTACT - normálová část (NORM) . . . . .	26
3.2	Srovnání metod výpočtu normálových sil . . . . .	28
3.3	Tečné zatížení . . . . .	31
3.3.1	Kalkerova lineární teorie valivého kontaktu . . . . .	31
3.3.2	Model podle Shena, Hedricka a Elkinse . . . . .	32
3.3.3	Poláchův model . . . . .	32
3.3.4	Algoritmus FASTSIM . . . . .	34
3.3.5	Algoritmus CONTACT - tečná část (TANG) . . . . .	35
3.4	Srovnání metod výpočtu tečných sil v kontaktu . . . . .	36
3.4.1	Prostý podélný skluz . . . . .	36
3.4.2	Prostý příčný skluz . . . . .	36

3.4.3	Prostý spin . . . . .	36
3.4.4	Kombinovaný skluz . . . . .	38
3.5	Shrnutí . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Výpočtový model</b>	<b>43</b>
4.1	Dynamika vozidla . . . . .	43
4.2	Trať . . . . .	47
4.2.1	Trajektorie trati . . . . .	47
4.2.2	Dynamika kolejového svršku . . . . .	49
4.3	Tvar povrchů v kontaktu . . . . .	52
4.3.1	Tvar kolejnice . . . . .	52
4.3.2	Tvar kola . . . . .	52
4.3.3	Vzdálenost mezi povrchy v kontaktu . . . . .	52
4.4	Příprava vstupů do algoritmů výpočtu kontaktních sil . . . . .	54
4.4.1	Příprava Hertzova řešení . . . . .	55
4.4.2	Relativní skluzu . . . . .	57
4.4.3	Příprava algoritmu CONTACT . . . . .	58
4.5	Přepočet silového působení . . . . .	58
4.6	Implementace pohybových rovnic a integrace . . . . .	59
4.7	Parametry použitého výpočtového modelu . . . . .	60
4.7.1	Vozidlo . . . . .	61
4.7.2	Trať . . . . .	65
4.7.3	Kontakt . . . . .	68
4.7.4	Ostatní parametry . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Výsledky</b>	<b>69</b>
5.1	Jízda vozidla s ploškami na kolech po rovné trati . . . . .	69
5.1.1	Matematický popis nerovností . . . . .	69
5.1.2	Ploška na jednom z kol dvojkolí . . . . .	70
5.1.3	Ploška na obou kolech dvojkolí . . . . .	78
5.1.4	Vliv hloubky opotřebení . . . . .	79
5.1.5	Vliv rychlosti vozidla a parametrů zploštění . . . . .	82
5.2	Jízda vozidla s vlnovým opotřebením kol po rovné trati . . . . .	84
5.2.1	Matematický popis nerovností . . . . .	84
5.2.2	Projevy nerovností v dynamickém chování vozidla . . . . .	85
5.2.3	Projevy nerovností na kontaktních plochách . . . . .	87
5.2.4	Vliv jednotlivých parametrů nerovností . . . . .	90
5.3	Jízda vozidla po rovné trati se zvlněnými kolejnicemi . . . . .	92
5.3.1	Matematický popis nerovností . . . . .	92
5.3.2	Projevy nerovností v dynamickém chování vozidla . . . . .	93
5.3.3	Projevy nerovností na kontaktních plochách . . . . .	96
5.3.4	Vliv jednotlivých parametrů nerovností . . . . .	101
5.4	Jízda vozidla v oblouku . . . . .	103
5.4.1	Matematický popis tratě . . . . .	103
5.4.2	Detail chování v kontaktu . . . . .	103
5.4.3	Vliv rychlosti vozidla . . . . .	105
5.4.4	Vliv poloměru oblouku . . . . .	115



5.4.5	Shrnutí . . . . .	125
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>127</b>
6.1	Cíl práce . . . . .	127
6.2	Vlastnosti použitého modelu . . . . .	127
6.3	Výsledky . . . . .	128
6.4	Směry dalšího výzkumu . . . . .	129
	<b>Literatura</b>	<b>131</b>
	<b>Seznam použitých symbolů</b>	<b>136</b>
	<b>Přílohy</b>	<b>147</b>
<b>A</b>	<b>Funkce atan2</b>	<b>149</b>
<b>B</b>	<b>Transformace souřadnic</b>	<b>151</b>

*OBSAH*

# 1. Úvod

## 1.1. Problémová situace

Tato práce se zabývá studiem silového působení v kontaktu kola a kolejnice. Přitom je uvažován obecný tvar kontaktních ploch, jsou tedy zahrnuty nerovnosti a opotřebení. Silové působení v kontaktu není omezeno pouze na kolo a kolejnici, ale je významně ovlivněno také vlastnostmi vozidla a dráhy, po níž vozidlo jede. Proto je nutné řešit zjednodušeně i pohyb vozidla jako celku.

## 1.2. Vymezení problému a cílů řešení

Snahou práce je vytvořit model soustavy železničního vozidla, dráhy a kontaktních sil mezi koly a kolejnicemi, přičemž tvar povrchů v kontaktu je obecný, zahrnuje tedy i nerovnosti. Dále model má zahrnovat prvky určené k utlumení vibrací vznikajících kvůli těmto nerovnostem, a to jak ve vozidle, tak v kolejovém svršku. Vozidlo je tvořeno soustavou vozidla a podvozků a jako dostačující model lze považovat množinu tuhých těles spojených vazbami pružina-tlumič. Aby nebyly zanedbány všechny vlivy, které působí na vozidlo, je uvažováno, že všechna tělesa vozidla se pohybují obecným prostorovým pohybem. Dráhu lze modelovat kombinací pružných nosníků kolejnic a soustavy tuhých těles, které nahrazují kolejový svršek (pražce a šterkové lože). Síly v kontaktu kolo-kolejnice jsou modelovány některou ze stávajících metod stanovení kontaktních sil (viz kap. 3).

Cílem řešení je získat časové průběhy veličin popisující pohyb vozidla a dráhy a zvláště veličiny popisující silové působení mezi koly a kolejnicemi a skluzové parametry. Tyto mohou být dále použity pro analýzu opotřebení, popř. teplotních polí vznikajícího tření, a to s pomocí metody konečných prvků nebo empirických vztahů.

## 1.3. Analýza problému

### Typ problému

Bude řešeno chování soustavy při předem daných podmínkách, půjde tedy o problém přímý.

### Omezení při řešení problému

Pro získání odpovídajícího silového působení v kontaktu mezi koly a kolejnicemi je nutné řešit, kromě vzájemného vztahu mezi nimi, také další tělesa, která ovlivňují jejich interakci. Poloha kol, resp. dvojkolí je významně ovlivněna chováním celého vozidla, poloha kolejnic chováním kolejového svršku. Železniční vozidlo je ovšem složitá soustava, kterou pro dané účely nelze modelovat jako celek. Vozidlo je tedy zjednodušeno na vlastní vozidlo, podvozky a dvojkolí a vazby mezi nimi. Všechna tato tělesa se mohou deformovat, ovšem kvůli výpočetní náročnosti dynamické úlohy MKP je nutno tuto soustavu řešit jako idealizovanou soustavu tuhých těles, spojených pružnými členy, které aproximují chování skutečné soustavy. Obdobně kolejový spodek je nutné modelovat zjednodušeně, protože

#### 1.4. SESTAVENÍ SYSTÉMU PODSTATNÝCH VELIČIN

šterkové lože tvoří obrovské množství jednotlivých kamenů, které je nemožné namodelovat přesně.

Pro řešení soustav tuhých těles a konkrétně železničního vozidla existují specializované výpočetní programy (ADAMS/Rail, SIMPACK, NUCARS, VAMPIRE). Žádný z těchto programů nebyl v době vzniku modelu na Ústavu mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky k dispozici. Dále bylo zjištěno studiem materiálů o těchto programech, že pro stanovení sil v kontaktu kolo-kolejnice využívají jednoduché modely (Hertzovo řešení stanovení normálové síly, analytické metody stanovení tečných sil), které nejsou náročné na výpočetní čas. Ovšem pro detailní analýzu silového působení v kontaktu nejsou tyto modely dostačující.

Pro modelování soustav tuhých těles se na Ústavu mechaniky těles používá program Matlab/Simulink s balíčkem SimMechanics. Proto je výpočtový model řešen v tomto prostředí, ve formě zdrojového kódu pro Matlab.

### 1.4. Sestavení systému podstatných veličin

#### Okolí soustavy

Při pohybu vozidla je uvažováno svislé kmitání a může dojít i ke ztrátě kontaktu mezi koly a kolejnicemi, je proto nutné uvažovat tíhové zrychlení  $g$ . Dalším způsobem, kterým se okolí soustavy může projevit, jsou atmosférické podmínky, a to převážně vlhkost a mráz, které způsobují snížení adheze v kontaktu. Ta může být změněna také záměrně (mazání okolku, sypání písku v zimě). Tyto změny se projeví změnou součinitele smykového tření  $f$ . Posledním parametrem, který ovlivňuje pohyb vozidla, je odpor vzduchu, přičemž konstanta odporu  $C_v$  je stanovena podle tvaru vozidla.

#### Geometrie a topologie soustavy

Soustava vozidla je v této práci rozdělena na vlastní vozidlo, podvozky a dvojkolí. Veškeré podrobnější dělení je zanedbáno z důvodu snížení výpočetní náročnosti. Geometrie vozidla a podvozků je vymezena pouze body uložení primárního a sekundárního odpružení, případně připojení dalších vozů. Podrobněji jejich geometrie zvýrazněna není. Rozdíl ovšem je v geometrii dvojkolí. Práce je zaměřena na studium vlivu nerovností na kontakt kola a kolejnice, proto je nutné znát tvar styčných ploch kol. Všechny základní rozměry je možné stanovit z dokumentace vozidla, přesný tvar kol s nerovnostmi je třeba změřit.

Dráhu lze modelovat na několika úrovních. Z pohledu setrvačných sil působících na vozidlo je potřeba znát křivost oblouků dráhy a převýšení vnější kolejnice. To je řešeno pomocí prostorové křivky trajektorie trati, s níž je úhel převýšení kolejnice svázán. Co se týká vlastností dráhy vzhledem k tlumení vibrací, kolejnice lze uvažovat jako pružné nosníky, připevněné k pražcům, které jsou uloženy v podloží. Podloží není modelováno jako sypká hmota šterkového lože, ale je zjednodušeno do náhradních hmot. Poslední úroveň je geometrie styčných ploch kolejnic, jejich profil a nerovnosti. Tvar oblouků a do jisté míry i přípustné nerovnosti jsou standardizovány. Mechanické vlastnosti kolejového svršku jsou také popsány v normách, případně je lze najít v literatuře. Opotřebení kolejnic, jejich zvlnění a změnu profilu je ovšem nutné změřit.

### Vazby mezi objekty soustavy a vazby soustavy s okolím

Jednotlivá tělesa vozidla jsou propojena pomocí primárního a sekundárního odpružení, což je soustava spojovacích prvků typu pružina-tlumič. Zatímco mezi vozidlem a podvozky existují vazby pro všech šest stupňů volnosti obecného prostorového pohybu, dvojkolí jsou uložena v ložiscích, takže se mohou libovolně otáčet kolem vlastní osy (klonění  $\varphi$ ). S okolím je vozidlo svázáno prostřednictvím tíhového zrychlení a odporu vzduchu.

Křivka trajektorie trati je nepohyblivá, její vazba na okolí je tedy pevná. V modelu tlumení vibrací se uvažuje, že kolejnice je ke každému pražci připojena vazbou pružina-tlumič (ve svislém, příčném směru a v krutu). Podobně je pražec připojen ve svislém směru k náhradním hmotám podloží a v příčném směru k základnímu tělesu. Náhradní hmoty podloží jsou připojeny k příslušnému pražci, k základnímu tělesu a mezi sebou.

### Aktivace soustavy

Kolejové vozidlo je aktivováno buď svou pohonnou jednotkou (elektrickou, diesel-elektrickou či dieselovou – podle typu vozidla), která působí při rozjezdu vozidla a ustáleném pohybu, anebo brzdou jednotkou, jejímž úkolem je zastavení rozjetého vozidla, přičemž nejvíce soustavu kolo-kolejnice zatěžuje havarijní brzdění vozidla. V modelu je zahrnuto ve funkci hnacího nebo brzděného momentu.

Dynamické projevy v kontaktu jsou aktivovány odchylkami od ideálního tvaru, a to nerovnostmi, obloukem, přechodnicemi, výhybkami apod.

### Ovlivnění soustavy okolím

Soustavu mohou ovlivnit povětrnostní podmínky v okolí soustavy tím, že se změní odpor prostředí nebo součinitel smykového tření mezi kolem a kolejnicí (kolejnice mokrá, zasněžená nebo pokrytá listím či ledovkou). Dále může být vozidlo ovlivněno dalšími vozy ve vlakové soupravě a v případě vibrací kolejnic se mohou projevit změny ve vlastnostech podloží. Tyto jevy se ovšem neuvažují, pokud to není nutné. V případě vlivu dalších vozů by to znamenalo násobení náročnosti výpočtu, v případě změn vlastností uložení je velice náročné získání vstupních údajů.

### Vlastnosti soustavy

Hmotnosti a momenty setrvačnosti jednotlivých částí vozidla a charakteristiky vazeb mezi nimi lze určit na základě výkresové dokumentace. Vlastnosti kolejnic a jejich uložení lze určit pomocí norem pro jejich konstrukci nebo z literatury.

### Procesy a stavy soustavy

Vozidlo se může pohybovat několika různými způsoby. Z pohledu jeho rychlosti se může rozjíždět, pohybovat stálou rychlostí nebo brzdit. Z pohledu křivosti dráhy se může pohybovat po rovné trati, obloukem nebo po přechodnici. Co se týká vzájemné polohy a pohybu kola a kolejnice, může docházet k menšímu či většímu skluzu, kontakt může být na styčné ploše kol nebo na okolku, dokonce může docházet ke ztrátám kontaktu.

Z mezních stavů lze uvažovat vykolejení jako mezní stav ztráty vazby. V takovém případě dojde k trvalé ztrátě kontaktu mezi kolem a kolejnicí a nehodě vozidla. Protože se práce

## 1.5. SOUČASNÝ STAV ŘEŠENÉ PROBLEMATIKY

zabývá pouze dynamikou soustavy a stanovením silového působení v kontaktu, nejsou už uvažovány veškeré mezní stavy, které jsou důsledkem tohoto silového působení. Ty by ovšem byly předmětem případné navazující práce, ve které by byly řešeny účinky tohoto silového působení na kolo nebo kolejnici.

### Projevy a chování soustavy

Projevem soustavy je dopředný pohyb v důsledku pohonu vozidla, jeho zrychlování při rozjezdu, popř. zpomalení při brzdění. Kvůli nerovnostem kola a kolejnice dochází k vibracím v soustavě, při překročení adheze v kontaktu kola s kolejnicí dochází k prokluzům a po ztrátě kontaktu dochází k nárazům při opětovném dosedání kola na kolejnici. V oblouku trati dochází ke kontaktu v oblasti okolku a nestejnomyšernému pohybu levého a pravého kola.

Při pohybu vozidla v oblouku opisuje každé dvojkolí odlišnou trajektorii, proto je vhodné řešit pohyb celého vozidla. Podobně jsou rozdíly v chování poháněných a nepoháněných dvojkolí, proto je třeba uvažovat i pohon vozidla.

### Důsledky projevů a chování soustavy

Kvůli vibracím se mění zatížení dvojkolí z konstantního na cyklické. Důsledkem nerovností tedy je vysokocyklová únava dvojkolí a kolejnic. Při prokluzech se v důsledku tření mezi kolem a kolejnicí uvolňuje teplo, které negativně působí na kolo i kolejnici. Toto teplo působí na povrchu a směrem dovnitř kola nebo kolejnice se pak negativně projevují teplotní gradienty. Tyto teploty dosahují takových hodnot, že může docházet i k materiálovým změnám.

Při ztrátě kontaktu dochází při opětovném dosedání k nárazům, v jejichž důsledku vznikají krátkodobě napěťové špičky, které mohou vyvolávat mikroplastickou deformaci. Na zakřivené trati se pak tyto jevy výrazněji projevují zejména na okolcích, kde dochází k jejich postupnému obrušování.

## 1.5. Současný stav řešené problematiky

### 1.5.1. Souhrnné publikace o dynamice železničního vozidla

Dynamika železničního vozidla je problematika, která je řešená na mnoha pracovištích po celém světě. Při modelování pohybu železničních vozidel je třeba řešit řadu problémů, z nichž lze uvést opotřebení kol a kolejnic (zvlnění styčných ploch, opotřebení profilu, únavové trhliny), zajištění stabilního pohybu vozidla v oblouku a prevence vykolejení, problémy pohonu a brzdění vozidla, problémy plynoucí ze snížené adheze při dešti nebo mrazu, problémy vyplývající z rozdílného pohybu vozů spojených v jedné vlakové soupravě, hluk doprovázející pohyb vozidla (hluk způsobený nerovnostmi, skřípot při průjezdu oblouků), jízdní komfort cestujících. Všeobecný přehled této problematiky lze získat např. z publikací [11, 20].

### 1.5.2. Síly v kontaktu

Cílem disertační práce je podrobněji zkoumat silové působení v kontaktu mezi koly a kolejnicemi. Mechanice kontaktu se věnuje publikace [32], v ní je ovšem valivému kontaktu věnována pouze část. Přímo na valivý kontakt je zaměřena publikace [33] a kapitola [34] v souboru přednášek [21]. Zde jsou prezentovány téměř všechny používané metody. Ty jsou ještě doplněny o model v [56]. Podrobnější přehled je v kap. 3. V posledních letech byla provedena řada studií, ve kterých byly srovnány metody stanovení normálových sil [2, 43, 44, 71]. K porovnání existují ještě i analýzy provedené metodou konečných prvků [10, 63]. Podle všech lze říci, že Hertzovo řešení normálové síly na kontaktu kola a kolejnice velmi zjednodušuje, protože dochází často ke kontaktu ve více bodech a kontaktní plocha má většinou neeliptický tvar. Tyto poznatky byly potvrzeny i experimentálně [38]. Hertzovo řešení je však mnohem méně náročné na výpočet než alternativní algoritmus CONTACT nebo metoda konečných prvků, proto má širší využití, zvláště pokud cílem není přímo rozložení silového působení v kontaktu. Ze studií, které se zabývaly řešením pomocí náročnějších metod, lze zmínit práci [6], která zkoumala vliv drsnosti na rozložení kontaktních tlaků a studie [28, 29], které se zabývaly správností předpokladu elastického poloprostoru v algoritmu CONTACT. Studie silového působení mezi různě opotřebenými profily kol a kolejnic byly publikovány v článcích [49, 50]. Všechny zmíněné studie byly statické analýzy, kde tečné zatížení nebylo uvažováno.

### 1.5.3. Nerovnosti - popis a příčiny vzniku

Nerovnostem na kolejnicích a na kolech je věnována řada prací. Z mnoha, které byly publikovány, lze zmínit práce [14, 16], které se věnují metodice měření a údržby kolejnic a obsahují i přehled mechanismů vzniku nerovností. Měřením nerovností kola se věnuje článek [30], simulací jejich růstu článek [42], analýzou vzájemné vazby mezi nerovnostmi kola a kolejnice práce [31]. Za příčiny tvorby nerovností jsou považovány opotřebení v kontaktu, dále rozdílná tuhost kolejnice v ohybu nad pražci a mezi pražci, přenos různých vibrací z vozidla i z kolejového svršku, počáteční nerovnosti na kolech i kolejnicích, dále plošky na kole nebo spoje kolejnic, případně výhybky. Za významný zdroj tvorby nerovností zejména v obloucích je považován skluz jednotlivých kol, dotek okolku, případně střídavý prokluz a ulpění kola (bylo zkoumáno i experimentálně [51]). Tyto jevy jsou detailně prozkoumány v práci [53], včetně porovnání mechanismů opotřebení pro vedoucí a vlečené dvojkolí podvozku. Je ukázáno, že každé z dvojkolí se chová v tomto ohledu jinak. Vliv změny adheze v zimních měsících na opotřebení je prokázán v článku [37]. Přehled typů hluku, který vzniká v důsledku nerovností, je v článku [35]. Jsou zde rozlišeny čtyři zdroje hluku: hluk nárazů (přejezd přes spoje kolejnic, přes výhybky), šum (způsobený drsností povrchů v kontaktu, běžnými procesy opotřebení), hluk způsobený nerovnostmi kolejnic (ztráty kontaktu a opětovné dosedání) a skřípot v oblouku (způsobený střídavým prokluzem a ulpíváním v kontaktu).

### 1.5.4. Rovinné modely

Při zkoumání ovlivnění pohybu vozidla nerovnostmi, silového působení v kontaktu v důsledku nerovností, hluku při tom vznikajícím a růstu nerovností byla pozornost upřena

### 1.5. SOUČASNÝ STAV ŘEŠENÉ PROBLEMATIKY

nejprve na chování na rovné trati. Pro tyto účely byly vytvořeny rovinné modely v podélném řezu ve směru jízdy. Dráha může být modelována na několika úrovních. Při uvažování nerovností je nutné zahrnout kmitání kolejnice, která bývá modelována jako pružný nosník. Různými způsoby bývá vytvořen kolejový svršek, někdy jako Winklerovo podloží, tuhé pražce uložené na pružinách, případně ještě na různých způsoby modelovaném podloží [40, 41]. V poslední době se uvažují i pružné pražce [4]. Publikované modely vozidel i trati mohou být i velmi jednoduché, jako model zaměřený na studium ztráty kontaktu [5]. Nerovnosti mohou být také nahrazeny stochastickým kinematickým buzením [46]. Pokročilejší modely už mají složité submodely kolejového svršku a vozidlo modelované soustavou vozu, podvozků a kol, přičemž jsou zjišťovány síly v kontaktu v odezvě na různé defekty [54, 62]. Chování ovlivněné pohonem kol a změnou adheze v kontaktu byl simulováno v práci [58]. Rovinný model byl použit i pro simulaci růstu nerovností [17, 23, 24]. Poslední model, který lze ještě označit jako rovinný, uvažuje obě kolejnice, ovšem bočení kol a jevy provázející pohyb v oblouku nejsou ještě zahrnuty [19].

#### 1.5.5. Pohyb v oblouku

Dalším krokem v tvorbě modelu chování vozidla je uvažování oblouku. Při pohybu v oblouku jsou předmětem zájmu zejména schopnost vést vozidlo obloukem, tření okolku, prokluz vnitřního kola z důvodu nestejného poloměru vnitřního a vnějšího oblouku a tvorba nerovností mechanismem prokluz-ulpění. Přehled o charakteru opotřebení na kolech při jízdě obloukem a rozčlenění oblouků podle nerovností, které v nich může vznikat, poskytuje článek [36]. Růst nerovností při jízdě v oblouku byl studován v [27, 48]. Chování poháněného dvojkolí bylo zkoumáno v [15, 57]. Jak působí mazání okolku vnitřního kola na zlepšení zatáčení ukazuje článek [52]. Pohyb velmi malým obloukem na hranici vykolejení a srovnání metod výpočtu tečných sil na této úloze byl publikován v článku [59].

#### 1.5.6. Programy pro modelování pohybu tuhých těles

Poslední úroveň, na které se modeluje pohyb železničního vozidla, je obecný prostorový model. Tyto modely jsou většinou vytvořeny v programech určených pro simulace pohybu soustav tuhých těles (ADAMS/Rail, Simpack, VAMPIRE, NUCARS). Tyto modely neuvažují nerovnosti, případně je v nich zahrnut pouze opotřeбенý profil. Model kontaktních sil v nich bývá jednoduchý kvůli nízké výpočetní náročnosti, která je požadovaná v praxi. Z prací, které využívají program ADAMS/Rail, lze zmínit [13, 47, 55].

#### 1.5.7. Prostorové modely

Prostorové modely pohybu železničního vozidla, které obsahují i nerovnosti, případně jejich růst, vytvořila a publikovala zatím dvě pracoviště na světě. Model, který je jednodušší a je zaměřen na zkoumání chování pohybu vozidla po rovné trati, vznikl na švédském pracovišti CHARMEC [1, 31]. Tento model má plnohodnotný submodel kolejového svršku, ale vozidlo je uvažováno pouze jako podvozek se dvěma dvojkolími a vozidlo je nahrazeno konstantní silou, kterou je podvozek zatížen. Složitější model byl vytvořen na State Key Laboratory of Traction Power v Číně [22, 25, 26]. Tento



model má stejný submodel kolejového svršku, ale model vozidla je tvořen polovinou vozu, podvozkem a dvojkolím a do pohybových rovnic je zahrnut i vliv jízdy po oblouku a po přechodnici. Oba zmíněné modely využívají pro stanovení normálové síly Hertzovo řešení. Pro stanovení tečné síly využívá první model algoritmus FASTSIM, druhý saturační funkci podle Shena, Hedricka a Elkinse.

### 1.5.8. Současný výzkum problematiky v ČR

V České republice se modelováním prostorového pohybu železničního vozidla zabývá Katedra mechaniky Fakulty aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni, kde řeší prostorový pohyb dvojkolí a podvozku, přičemž dvojkolí jsou modelována kuželovými plochami a kolejnice jsou nepohyblivé a nahrazeny válcem [61, 64, 65]. Jejich skutečný tvar nebo nerovnosti nejsou uvažovány.

## 1.6. Příspěvek k rozvinutí problematiky

Většina dosud publikovaných prací se zabývá zejména modelováním pohybu na rovné trati nebo v oblouku s konstantním poloměrem. Není tak uvažováno chování, které se děje při přechodu z rovného úseku do oblouku a naopak. Většinou je také vozidlo omezeno na dvojkolí, případně podvozek, ale vliv pohybu vozidla jako celku není uvažován. Pokud je pohyb vozidla řešen obecně v prostoru, je pro tyto účely většinou využíván některý z programů pro řešení dynamiky tuhých těles. Tyto programy však neumožňují detailní řešení silového působení v kontaktu ani uvažování nerovností kontaktních povrchů.

Za nejvíce pokročilý model pohybu železničního vozidla i s nerovnostmi lze považovat model publikovaný v [26]. Tento model uvažuje obecný prostorový pohyb poloviny vozidla (půl vozu, podvozek a dvě dvojkolí), přičemž to se pohybuje po trati, jejíž poloměr se může měnit a lze zapojit i vliv nerovností. I tento model však pro stanovení sil v kontaktu pracuje s normálovou silou stanovenou podle Hertzova řešení a tečnou silou stanovenou modelem Shena, Hedricka a Elkinse. Jak bylo ukázáno v člancích, které se věnují studiu kontaktních sil na statických úlohách, v případě uvažování obecného tvaru kontaktních ploch tyto metody nemusí být dostatečné. Dále platí, že přední a zadní část vozidla se v oblouku nepohybují vždy stejně a na dvojkolí předního a zadního podvozku proto mohou působit rozdílné síly.

Z těchto důvodů je v rámci této práce vytvořen model pohybu celého železničního vozidla, v kterém je zahrnut obecný tvar dráhy i obecný tvar kontaktních ploch. Tento model může být použit pro modelování pohybu vozidla na úsecích s proměnným poloměrem oblouku. Tato práce je však zaměřena na zkoumání kontaktních sil v různých podmínkách, proto je hlavní důraz kladen právě na stanovení sil v kontaktu.

Většina stávajících modelů je navíc odvozena takovým způsobem, že je sestavena soustava diferenciálních rovnic, které jsou odvozeny ve skalární formě. Vytvoření nového modelu vozidla potom znamená nové odvození celého řešení. Proto je nový model vytvořen takovým způsobem, aby jednotlivé části tvořily samostatné bloky, a to funkce pro Matlab. Tak bude možné po propojení s balíčkem SimMechanics pracovat s modelem podobně jako s jinými prostředím pro řešení dynamiky soustavy tuhých těles, které jsou zaměřeny na problémy železniční dopravy (ADAMS/Rail, NUCARS, VAMPIRE, Simpack).

## *1.6. PŘÍSPĚVEK K ROZVINUTÍ PROBLEMATIKY*

## 2.1. Konstrukční prvky

### 2.1.1. Profily kol

Na základě letitých zkušeností z provozu železničních kol je snaha přiblížit nový profil kola tvaru vzniklému po opotřebení. V současnosti je například nejběžnější profil označený S1002, viz obrázek 2.1.

Technical drawing of a mechanical part with dimensions and labels. The drawing shows a cross-section of a part with a total width of 135. Key dimensions include a top width of 70.0, a middle width of 58.588, and a bottom width of 55.0. A vertical dimension of 49.5 is shown. A horizontal dimension of 35.0 is indicated. A vertical dimension of 16.446 is shown. A horizontal dimension of 32.158 is indicated. A vertical dimension of 26.211 is shown. A horizontal dimension of 32.5 is indicated. A vertical dimension of 8.510 is shown. A horizontal dimension of 32.780 is indicated. A vertical dimension of 9.510 is shown. A horizontal dimension of 28 is indicated. A vertical dimension of 70° is shown. A horizontal dimension of 5-45° is shown. A vertical dimension of >1:15,5 is shown. Labels R13, R20, and R12 are present. A label 5-45° is present. A label >1:15,5 is present. A label 28 is present. A label 8.510 is present. A label 9.510 is present. A label 32.5 is present. A label 32.158 is present. A label 26.211 is present. A label 32.780 is present. A label 16.446 is present. A label 35.0 is present. A label 49.5 is present. A label 55.0 is present. A label 58.588 is present. A label 70.0 is present. A label 135 is present. A label 70° is present. A label 5-45° is present. A label >1:15,5 is present. A label R13 is present. A label R20 is present. A label R12 is present.

13

## 2.1. KONSTRUKČNÍ PRVKY

### 2.1.2. Profily kolejnic

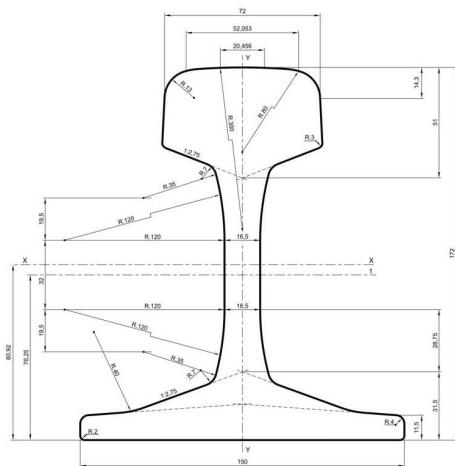
Řez kolejnice lze rozdělit na tři hlavní části - patku, stojinu a hlavu kolejnice. Patka slouží k uchycení kolejnice k pražcům, stojina vytváří prostor pro kolo nad pražci a hlava kolejnice slouží pro kontakt s koly vozidel.

U železničních tratí je profil povrchu kolejnic obvykle jednodušší než profil kol. Tvoří ho většinou několik napojených kružnic s měnícím se rádiusem, přičemž největší je na vrcholu profilu na styčné ploše a zmenšuje se směrem ke hraně.

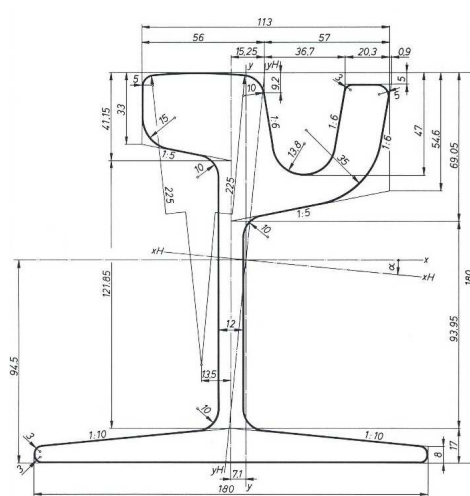
V současnosti jsou nejběžnější profily UIC60 a UIC54. Profil UIC60 (na obrázku 2.2) je tvořen kružnicemi o poloměru 300 mm, 80 mm a 13 mm. Profil UIC54 je obdobný, liší se jen parametry patky a stojiny. Matematicky je opět výhodné reprezentovat tyto profily množinou bodů a z nich složenou splajnou.

Pro zajištění vedení železničního vozidla jsou kolejnice na pražcích uloženy s malým sklonem ke středu tratě, nazývaným úklon kolejnice. Síly působící na kolo kolmo na normálu kolejnice tak neustále působí směrem ke středu tratě a vedou vozidlo. Dříve se u nás používal úklon 1:20 (asi  $2,86^\circ$ ), dnes se používá úklon 1:40 (asi  $1,43^\circ$ ).

Profil kolejnic pro tramvajové tratě je složitější. Tramvajové tratě vedou obvykle ulicemi měst a jsou často sdíleny se silničními vozidly. Proto je mezi kolejnicemi speciální panel, někdy pokrytý asfaltem. Aby se vytvořil prostor pro okolek, který samozřejmě nemůže být zalitý asfaltem, je součástí hlavy i žlábek pro okolek, viz obrázek 2.3.



Obrázek 2.2: Profil kolejnice UIC 60.  
Převzato z [8].



Obrázek 2.3: Profil kolejnice Ri60.  
Převzato z [12].

### 2.1.3. Rozchod kol a kolejnic

Zatímco pro přenos sil mezi koly a kolejnicemi a rozložení kontaktních tlaků jsou důležité profily kol a kolejnic, pro vedení vozidla a pro bezpečnost proti vykolejení je důležité i jejich vzájemné umístění a rozsah pohybu, které povolují.

Klíčovým parametrem kolejnic je jejich rozchod, tedy vzdálenost mezi vnitřními stranami hlav levé a pravé kolejnice (viz [70]). V Evropě, Severní Americe a Číně je běžný rozchod 1435 mm. Protože ke kontaktu dochází na povrchu kolejnice, je vzdálenost styčných ploch kolejnic 1500 mm. Časté jsou však i kolejnice s širším i užším rozchodem. Širokorozchodné kolejnice jsou např. ve státech bývalého Sovětského svazu

## 2. GEOMETRIE KOL A KOLEJNIC

(rozchod 1520 mm), na Pyrenejském poloostrově (1668 mm) a v Irsku (1600 mm). Naopak úzkorozchodné kolejnice lze najít např. v Japonsku (1067 mm) nebo i v České republice tramvajové tratě v Liberci (1000 mm, viz obrázek 2.4) nebo Jindřichohradecké místní dráhy (760 mm).

Podobně mají definované parametry i dvojkolí. Prvním parametrem je vzdálenost styčných kružnic, který je stejně velký jako u styčných ploch kolejnic, tedy 1500 mm. Dalším důležitým parametrem je rozchod dvojkolí. Je to vzdálenost vnějších povrchů okolků a má zajistit vedení dvojkolí na trati. Musí tedy odpovídat rozchodu kolejnic, navíc doplněna o vůli. Může být např. v rozmezí od 1410 mm do 1425 mm. Třetím parametrem je rozkolí, které udává velikost prostoru mezi koly, může to být např. 1360 mm. Rozdíl rozchodu kolejnic a rozchodu dvojkolí pak vymezuje rozsah příčného pohybu dvojkolí.



Obrázek 2.4: Kombinace tratí s normálním a úzkým rozchodem v tramvajové síti v Liberci.

### 2.1.4. Oblouk

V předcházejících kapitolách byly zmíněny parametry rovné tratě. Nicméně při výstavbě v krajině je nutné přizpůsobit trať místním podmínkám, takže se není možné vyhnout obloukům. Při jízdě v oblouku se musí vyrovnávat odstředivá síla, aby nedocházelo k nadměrnému zatěžování kolejnic, proto vnější kolejnice je vyvýšena nad vnitřní o určité převýšení. Jeho teoretická hodnota je dána vztahem odvozeným z rovnováhy poměru převýšení kolejnice  $p_v$  a vzdálenosti styčných kružnic  $L_s$  a poměru odstředivé síly při maximální povolené rychlosti obloukem  $F_o$  a tíhové síly  $G$  (podle [45]):

$$\frac{p_v}{L_s} = \frac{F_o}{G} \quad (2.1)$$

$$\frac{p_v}{L_s} = \frac{m \cdot v^2}{R \cdot m \cdot g} \quad (2.2)$$

## 2.1. KONSTRUKČNÍ PRVKY

$$p_v = \frac{L_s \cdot v^2}{R \cdot g} \quad (2.3)$$

Po dosazení platí vztah pro teoretické převýšení kolejnice

$$p_v = 11.8 \cdot \frac{v^2}{R} \quad (2.4)$$

Tento vzorec platí pro převýšení  $p_v$  v [mm], rychlost  $v$  v [km/h] a poloměr oblouku  $R$  v [m]. Protože po trati jezdí vlaky i nižší rychlostí, je místo teoretického převýšení používáno převýšení doporučené [39], a to

$$p_v = 7.1 \cdot \frac{v^2}{R} \quad \text{pro } v \leq 120 \text{ km/h} \quad (2.5)$$

$$p_v = 6.5 \cdot \frac{v^2}{R} \quad \text{pro } v > 120 \text{ km/h} \quad (2.6)$$

Minimální poloměr oblouku závisí na druhu trati. U nových tratí je minimální poloměr 600 m, u tratí rekonstruovaných 300 m. Na regionálních tratích byly dříve přípustné i poloměry 190 m, přičemž pro lepší průjezdnost oblouku s poloměrem menším než 275 m je rozchod kolejnic zvětšen o hodnotu

$$\Delta L_k = \frac{7150}{R} - 26 \quad (2.7)$$

kde poloměr oblouku  $R$  je v [m] a výsledné zvětšení rozchodu kolejnic  $\Delta L_k$  v [mm].

### 2.1.5. Stoupání a klesání

Při zdolávání kopců, pohoří nebo i při mimoúrovňových kříženích musí trať nastoupávat nebo v opačném směru klesat. Na rovné trati se toto projeví jako nakloněná rovina, při jízdě v oblouku osa trati opisuje obecnou křivku. Z pohledu zatížení kol a kolejnic se stoupání či klesání projeví zejména zvýšeným zatížením v tečném směru, kdy při stoupání pohon vlaku musí překonat i tečnou složku tíhové síly, obdobně při klesání se musí tečná složka tíhové síly ubrzdít. Pro zajímavost, nejvyšší sklon trati v České republice je na trati z Tanvaldu do Harrachova, a to 57 ‰ ([66]).

### 2.1.6. Přechodnice a vzestupnice

Při napojení rovného úseku a oblouku, případně dvou oblouků přes inflexní bod, nemůže být oblouk napojen přímo k rovné části, protože by došlo ke skokové změně křivosti a skokovému zatížení. Proto je mezi rovnou část a oblouk vložena přechodnice ve tvaru klotoidy (křivka s lineární změnou křivosti), dané parametrickou funkcí [39]

$$x = l - \frac{l^5}{40 \cdot R^2 \cdot L_K^2} + \frac{l^9}{3456 \cdot R^4 \cdot L_K^4} \quad (2.8)$$

$$y = \frac{l^3}{6 \cdot R \cdot L_K} - \frac{l^7}{336 \cdot R^3 \cdot L_K^3} + \frac{l^{11}}{42240 \cdot R^5 \cdot L_K^5} \quad (2.9)$$

kde  $x$  a  $y$  jsou souřadnice obecného bodu přechodnice,  $l$  je parametr délky podél přechodnice,  $L_K$  je délka celé přechodnice a  $R$  poloměr napojeného oblouku.

## 2. GEOMETRIE KOL A KOLEJNIC

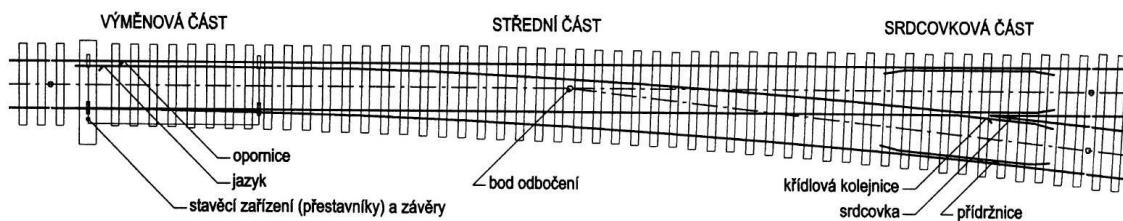
Za určitých okolností, zejména u výhybek, přechodnice není použita. Tyto podmínky, stejně jako tvar oblouků i přechodnic, specifikuje norma ČSN 73 6360-1(2008), která se zabývá uložením kolejnic.

Podobně jako přechodnice pro plynulé navázání křivosti je pro plynulé navázání sklonu trati definována i vzestupnice. Maximální změna sklonu na jednotku délky je pak definována normou.

### 2.1.7. Výhybky a křížení

Pro přechod z jedné trati na jinou slouží výhybky. Výhybka je komplexní soustava kolejnic a pohyblivých částí, která zajišťuje možnost volby směru pohybu kolejového vozidla. Sestává se z několika hlavních částí, viz obrázek 2.5. Kolejnice v přímé nebo odbočné větvi vedou vozidlo požadovaným směrem, kde přiložení jazyků volí požadovaný směr. Kritické místo celé výhybky je srdcovka, kde se kříží obě větve a kolejnice musí být přerušeny, aby umožnily průjezd i v druhém směru. V důsledku tohoto přerušení kola ztrácí kontakt a při opětovném dosednutí na srdcovku ji významně rázově zatěžují. Pro zabezpečení směru je ještě výhybka opatřena přídržnicemi u vnějších kolejnic na úrovni srdcovky.

Křížení tratí je podobné srdcovkové části, ovšem z jedné tratě není možné přejet na druhou.



Obrázek 2.5: Zhlaví železniční stanice. Převzato z [39].

### 2.1.8. Dilatační spáry

Pro vyrovnání tepelné roztažnosti kolejnic za horkého počasí jsou mezi kolejnicemi dilatační spáry. Nejčastěji se používají dva typy. Prvním je 20 mm škvíra mezi dvěma spojenými kolejnicemi zajišťující prostor pro roztahování, viz obrázek 2.6. Dalším je spojení kolejnic v rovině šikmé k ose trati (viz obrázek 2.7). Takto je zajištěn plynulý přechod kola s jedné kolejnice na druhou bez rázových sil a současně se kolejnice mohou libovolně roztahovat a posouvat vůči sobě.

## 2.2. OPOTŘEBENÍ



Obrázek 2.6: Příčná dilatační spára na železniční trati v Brně-Černovicích.



Obrázek 2.7: Šikmá dilatační spára na tramvajové trati v Brně-Bystřci.

## 2.2. Opotřebení

Při provozu kolejových vozidel dochází k opotřebení jak kol tak kolejnic, ať už v důsledku běžného provozu nebo poruchových stavů. Jejich tvar se tedy v průběhu životnosti mění. Některé charakteristické typy opotřebení jsou popsány níže.

### 2.2.1. Opotřebení kol

Opotřebení kol vzniká v zásadě třemi způsoby. První je běžné opotřebení způsobené třením při odvalování kol, další je způsobeno nepravidelnostmi v pohybu dvojkolí po trati a poslední způsob vzniku opotřebení je při poruchách, popř. dlouhodobém stání.

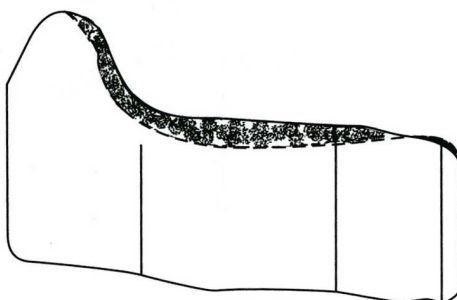


### Opotřebení profilu

Opotřebení profilu kol je nejběžnější druh opotřebení. Dochází k němu zejména v oblasti, kde dochází ke kontaktu s kolejnicí při jízdě po rovné trati, a na okolku, který se postupně obrušuje při jízdě v obloucích.

Současné profily kol jsou navrhovány tak, aby už u nového kola připomínaly tvar opotřebeného kola. Tak se minimalizuje další opotřebení. Nicméně za provozu kola se profil pozvolna mírně mění a posouvá k ose kola, viz obrázek 2.8.

Matematicky lze takovéto opotřebení popsat novou množinou bodů profilu a výsledné splajny.



Obrázek 2.8: Opotřebení profilu železničního kola. Převzato z [20].

### Zvlnění po obvodu kola

Zvlnění po obvodu kola vzniká v důsledku pravidelných vibrací při pohybu kolejového vozidla. Tyto vibrace mohou být vybuzeny například odchylkami v ohybové tuhosti kolejnic v uchycení na pražci a v prostoru mezi pražci. V závislosti na dynamických vlastnostech podvozku a samotného vozidla se vytváří pravidelné opotřebení po obvodu vozidla. Podle článku [42] je počet vln na obvodu různý a liší se v oblasti styčné kružnice a v oblasti okolku. Podle tohoto článku byly u styčných kružnic zaznamenány zvlnění o počtu např. 3, 7, 20 vln, v oblasti okolku 2 nebo 5 vln. Příklad zvlnění na kole je na obrázku 2.9.

Matematicky je možné zvlnění kola vyjádřit například jednoduchou funkcí v cylindrickém souřadném systému s osou rotace shodnou s osou dvojkoľí.



Obrázek 2.9: Zvlnění po obvodu kola.  
Převzato z [9].



Obrázek 2.10: Ploška na kole.  
Převzato z [69].

## 2.2. OPOTŘEBENÍ

$$R_n(\alpha_d) = R_0 - \frac{A_{ww}}{2} \cdot [1 + \cos(N_{ww} \cdot \alpha_d)] \quad (2.10)$$

kde  $R_n$  je funkce vzdálenosti od osy dvojkolí,  $R_0$  poloměr kola na daném místě určený profilem kola,  $A_{ww}$  hloubka nerovností,  $N_{ww}$  počet vln po obvodu kola,  $\alpha_d$  úhel v cylindrickém souřadném systému.

### Ploška

Ploška na dvojkolí vytváří rázové zatížení. Může vzniknout obvykle buď zablokováním kol při provozu nebo při brzdění (takto vzniklá ploška na obrázku 2.10), popř. v menší míře při dlouhodobém odstavení vozidla, obvykle vagónu.

Takováto nerovnost obvykle vytváří ostrou nespojitost vzhledem k rotačně symetrickému zbytku kola. Spojitá funkce, která vytváří podobnou lokální změnu je například funkce

$$R_n(\alpha_d) = R_0 - A_{fs} \cdot \exp(-B_{fs} \cdot \alpha_d^2) \quad (2.11)$$

Zde  $R_n$  je funkce vzdálenosti od osy dvojkolí,  $R_0$  opět poloměr na daném místě daný profilem,  $A_{fs}$  hloubka nerovnosti, tedy maximální odchylka plošky od kruhovitosti kola,  $B_{fs}$  určuje, jak široká je ploška.

### 2.2.2. Opotřebení kolejnic

Stejně jako se při provozu vyvíjí tvar kol, dochází k opotřebení i na kolejnicích. Zdrojem jejich opotřebení jsou zejména působení kol projíždějících vozidel, ale významnou roli hraje například i uložení kolejnic na pražcích.

#### Opotřebení profilu

Opotřebení profilu je v zásadě dvojího druhu. Prvním je snižování temene kolejnice, které je způsobeno běžným provozem a určuje životnost všech kolejnic. Tím druhým je zakusování okolku, které lze najít na vnější kolejnici oblouků (viz obrázek 2.11). Když v oblouku kolejnice tlačí vozidlo do strany, dochází k silnějšímu působení na okolek, protože setrvačnost vozidla má snahu držet ho v přímém pohybu, a okolky se časem otisknou do profilu kolejnic.

Matematicky lze toto opotřebení vyjádřit pomocí upravené množiny bodů profilu a odpovídající splajny.

#### Zvlnění kolejnic

Pravidelné zvlnění kolejnic vzniká v důsledku kmitání dvojkolí železničních vozidel. Obvykle je lze najít na dvou typických místech. Tím prvním je vnitřní kolejnice oblouku (viz obrázek 2.12). Vzniká tak, že vnitřní kolo v oblouku se pohybuje po kratší dráze než vnější kolo. Celé dvojkolí se ovšem pohybuje stejnou úhlovou rychlostí. Proto vnitřní kolo neustále předbíhá to vnější a opět se vrací. Tento kmitavý pohyb postupně vytváří vlny na kolejnici. Druhé typické místo je na zastávkách a stanicích, kde se vlaky často

## 2. GEOMETRIE KOL A KOLEJNIC



Obrázek 2.11: Opotřebení profilu kolejnice na železniční trati Brno - Bílovice nad Svitavou.



Obrázek 2.12: Vlnové opotřebení kolejnice na železniční trati Brno - Bílovice nad Svitavou.

rozjíždějí. Zde vlny vznikají na obou kolejnicích v důsledku většího zatížení. Matematicky je možné tyto vlny jednoduše popsat funkcí

$$N_n = A_w \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{L_w} \cdot y\right) \quad (2.12)$$

kde  $N_n$  je funkce nerovností,  $A_w$  amplituda nerovností,  $L_w$  vlnová délka nerovností,  $y$  poloha podél kolejnice.

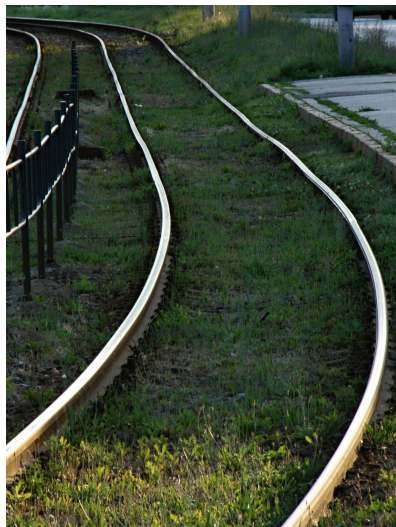
### Náhlé vybočení kolejnic

V důsledku degradace podloží, uvolnění šroubů upevňujících kolejnice a dalších závad, může dojít i k náhlému vybočení kolejnice. To se pak projevuje náhlým škrubnutím vozidla, v katastrofickém případě i vykolejením. Na obrázku 2.13 je podobné vybočení na tramvajové trati. Na fotografii je patrné výrazné zvlnění trati. Protože se však nachází hned za zastávku, tedy v úseku, kde se tramvaje pohybují malou rychlostí, a protože délka změny je poměrně dlouhá, nepředstavuje hrozbu pro bezpečnost provozu. Matematicky je opět možné ji popsat exponenciální funkcí

$$N_n = N_m \cdot \exp(-L_n \cdot y^2) \quad (2.13)$$

Zde  $N_n$  je funkce vychýlení,  $N_m$  velikost vychýlení,  $L_n$  délka vychýlení.

## 2.2. OPOTŘEBENÍ



Obrázek 2.13: Zvlnění tramvajové tratě v Brně - Komíně.

### Opotřebení v obloucích

Jak už bylo zmíněno v předchozích odstavcích, v obloucích vzniká charakteristické opotřebení. Na vnitřní kolejnici oblouku vzniká zvlnění od kmitajícího vnitřního kola, kdežto do vnější kolejnice se zakusuje okolek, když kolejnice tlačí vozidlo do oblouku. Obě kolejnice na společném snímku jsou na obrázku 2.14.



Obrázek 2.14: Opotřebení kolejnic v oblouku železniční tratě Brno - Bílovice nad Svitavou.

### 3. Teorie výpočtu sil ve valivém kontaktu

Tato kapitola se věnuje teoriím řešení valivého kontaktu. Valivý kontakt je jedním z klíčových problémů železniční dopravy a jeho řešení ji provází od jejích počátků. Problém valivého kontaktu má vždy dvě části - určení normálových sil, které brání tomu, aby se tělesa v kontaktu prolнула do sebe, a určení tečných sil, které jsou důsledkem tření mezi tělesy. Při řešení valivého kontaktu jako tuhých těles zde dochází v normálovém směru pouze k přenosu sil, které přitlačují tělesa k sobě. Tečné síly se řídí Coulombovým zákonem

$$F_t = f \cdot N \quad (3.1)$$

kde  $F_t$  značí velikost třecí síly,  $f$  je součinitel smykového tření a  $N$  je velikost normálové síly.

Přelom v náhledu na tuto problematiku přinesla v roce 1882 Hertzova práce *Über die Berührung fester elastischer Körper* [18]. V ní se tělesa v kontaktu uvažují jako pružná tělesa a velikost normálové síly je úměrná vzdálenosti, o kterou jsou k sobě stlačena (viz kap. 3.1.1). Poté se začal i u přenosu tečných sil uvažovat kontakt pružných těles. V roce 1926 zveřejnil Carter analytické řešení rozložení tečných sil v ustáleném pohybu v řezu podél směru jízdy (2D problém) [33, kap. 2.2.1]. V roce 1938 Cattaneo publikoval řešení posunu dvou koulí bez odvalování [33, kap. 5.2.1.1]. Pracemi Johnsona v roce 1958 začala éra 3D řešení valivého kontaktu, tedy rozložení tečného zatížení v celé oblasti kontaktní plochy. Nejprve zveřejnil práce na téma prostý skluz a prostý spin [33, str. 64], v roce 1964 spolu s Vermeulenem vytvořili teorii pro saturaci tečné síly na hodnotě dané Coulombovým zákonem [33, kap. 2.2.3.1].

Dizertací, dokončenou v roce 1967, začíná výzkum nejvýraznější postavy v oboru ve 20. století, J.J. Kalkera. V ní publikuje svoji lineární teorii [33, str. 65] (podrobněji v kap. 3.3.1). Následuje v roce 1979 algoritmus CONTACT [33, kap. 4] (podrobněji v kap. 3.1.2 a 3.3.5), který počítá rozložení normálového i tečného zatížení pro tělesa obecného tvaru, a v roce 1982 algoritmus FASTSIM [33, kap. 3] (podrobněji v kap. 3.3.4) určený pro rychlý numerický výpočet tečných sil.

V roce 1984 publikují Shen, Hedrick a Elkins své závěry snah o zkombinování Kalkerovy lineární teorie a teorie Vermeulena a Johnsona o saturaci tečné síly [60] (podrobněji v kap. 3.3.2). A nakonec v roce 1999 vytváří Polách svůj model tečných sil [56] (podrobněji v kap. 3.3.3).

Modely normálového i tečného zatížení použité v této práci jsou podrobněji rozebrány níže.

#### 3.1. Normálové zatížení

Normálové silové působení v kontaktu vyjadřuje přenos sil při vzájemném přitlačení obou dotýkajících se těles. Když se uvažují pružná tělesa, dochází k jejich deformaci v okolí kontaktu, přičemž velikost normálové síly je úměrná tvaru těles, materiálu a velikosti teoretického prolnutí nedeformovaných těles.

### 3.1. NORMÁLOVÉ ZATÍŽENÍ

#### 3.1.1. Hertzova teorie kontaktu

Hertzova teorie kontaktu [32, kap. 4], [33, kap. 1.7.1], [34, kap. 2.1] je analytické řešení normálové síly a vychází z těchto předpokladů:

- tělesa v kontaktu mají podobné mechanické vlastnosti,
- jejich povrch má v místě kontaktu konstantní zakřivení,
- kontaktní plocha má tvar elipsy.

Jsou-li poloměry zakřivení povrchů v kontaktu  $R_x^{(1)}$ ,  $R_y^{(1)}$ ,  $R_x^{(2)}$  a  $R_y^{(2)}$ , pak hlavní křivosti  $A$  a  $B$  jsou

$$A = \frac{1}{2 \cdot R_x^{(1)}} + \frac{1}{2 \cdot R_x^{(2)}} \quad (3.2)$$

$$B = \frac{1}{2 \cdot R_y^{(1)}} + \frac{1}{2 \cdot R_y^{(2)}} \quad (3.3)$$

Potom funkce vzdálenosti povrchů má tvar

$$d_{cs} = A \cdot x^2 + B \cdot y^2 - h \quad (3.4)$$

kde  $A$  a  $B$  jsou hlavní křivosti kontaktního páru,  $h$  je penetrace nedeformovaných povrchů. Pokud vzdálenost povrchů  $d_{cs}$  je v daném místě větší než nula, pak je zde mezera mezi povrchy, pokud je menší nebo rovna nule, pak jsou tělesa v kontaktu.

Důsledkem podmínky eliptického tvaru kontaktní plochy je to, že i rozložení kontaktního tlaku  $p_z$  má tvar elipsoidu:

$$p_z(x, y) = p_{max} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_{ce}}\right)^2 - \left(\frac{y}{b_{ce}}\right)^2} \quad (3.5)$$

kde  $p_{max}$  je maximální kontaktní tlak a  $a_{ce}$ ,  $b_{ce}$  jsou délky hlavních poloos kontaktní elipsy, jejichž velikost není známa. Jejich poměr je ovšem závislý na tvaru povrchů v kontaktu, tedy na parametrech  $A$  a  $B$ .

Pomocí axiální funkce (viz [34, kap. 2.1], strana 23) se z  $A$  a  $B$  stanoví excentricita kontaktní elipsy  $m$ :

$$\cos t = \left| \frac{A - B}{A + B} \right| = m^2 \cdot \frac{\mathbf{D}(m^2) - \mathbf{C}(m^2)}{\mathbf{E}(m^2)} \quad (3.6)$$

Zde  $\mathbf{C}(m^2)$ ,  $\mathbf{D}(m^2)$ ,  $\mathbf{E}(m^2)$  a později použitý  $\mathbf{K}(m^2)$  jsou úplné eliptické integrály

$$\mathbf{C}(m^2) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t \cdot \cos^2 t}{\sqrt{1 - m^2 \cdot \sin^2 t}} dt \quad (3.7)$$

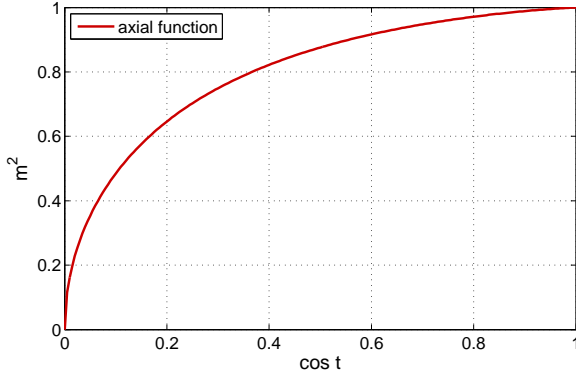
$$\mathbf{D}(m^2) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1 - m^2 \cdot \sin^2 t}} dt \quad (3.8)$$

$$\mathbf{E}(m^2) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m^2 \cdot \sin^2 t} dt = (2 - m^2) \cdot \mathbf{D}(m^2) - m^2 \cdot \mathbf{C}(m^2) \quad (3.9)$$

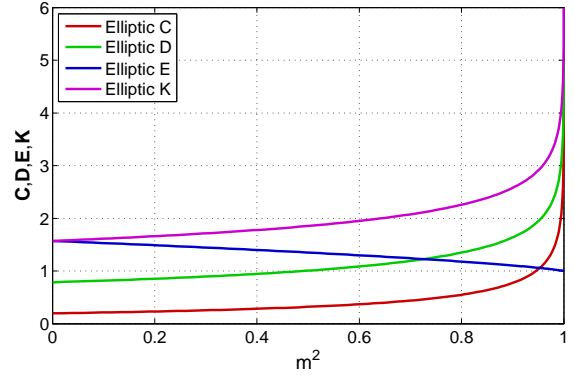
$$\mathbf{K}(m^2) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - m^2 \cdot \sin^2 t}} dt = 2 \cdot \mathbf{D}(m^2) - m^2 \cdot \mathbf{C}(m^2) \quad (3.10)$$



### 3. TEORIE VÝPOČTU SIL VE VALIVÉM KONTAKTU



Obrázek 3.1: Graf axiální funkce.



Obrázek 3.2: Grafy úplných eliptických integrálů.

Poměr kvadrátů hlavních poloos kontaktní elipsy  $k_e$  závisí na excentricitě  $m$  podle:

$$k_e = \frac{b_{ce}^2}{a_{ce}^2} = \begin{cases} 1 - m^2 & \text{pro } A \leq B \\ \frac{1}{1 - m^2} & \text{pro } A > B \end{cases} \quad (3.11)$$

Podle řešení (1.57e) v [33, kap. 1.7.1] platí

$$3 \cdot N \cdot \frac{1 - \mu}{G} \cdot \mathbf{E}(m^2) = 2 \cdot \pi \cdot (A + B) \cdot a_{ce}^2 \cdot b_{ce} \quad (3.12)$$

Zde  $G$  je kombinovaný modul pružnosti ve smyku a  $\mu$  je kombinovaný Poissonův poměr, které se stanovují z rovnic

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{2 \cdot G^{(1)}} + \frac{1}{2 \cdot G^{(2)}} \quad (3.13)$$

$$\mu = G \cdot \left[ \frac{\mu^{(1)}}{2 \cdot G^{(1)}} + \frac{\mu^{(2)}}{2 \cdot G^{(2)}} \right] \quad (3.14)$$

Odvozením z rovnic 3.11 a 3.12 se získají délky hlavních poloos kontaktní elipsy

$$a_{ce} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot N \cdot (1 - \mu) \cdot \mathbf{E}(m^2)}{2 \cdot \pi \cdot G \cdot (A + B) \cdot k_e}} \quad (3.15)$$

$$b_{ce} = a_{ce} \cdot \sqrt{k_e} \quad (3.16)$$

Opět z (1.57e) v [33, kap. 1.7.1] se použije vztah pro penetraci nedeformovaných povrchů

$$h = (A + B) \cdot a_{ce}^2 \cdot \frac{\mathbf{K}(m^2)}{\mathbf{E}(m^2)} \quad (3.17)$$

Nyní už jsou známy všechny potřebné veličiny pro stanovení závislosti normálové síly na penetraci nedeformovaných povrchů

$$N = \frac{2 \cdot \pi \cdot G}{3 \cdot (1 - \mu)} \cdot \sqrt{\frac{\mathbf{E}(m^2) \cdot h^3}{(A + B) \cdot k_e \cdot \mathbf{K}^3(m^2)}} \quad (3.18)$$

a odsud maximální kontaktní tlak

$$p_{max} = \frac{3 \cdot N}{2 \cdot \pi \cdot a_{ce} \cdot b_{ce}} \quad (3.19)$$

### 3.1. NORMÁLOVÉ ZATÍŽENÍ

Pomocí uvedených vztahů se v závislosti na vzájemné poloze těles v kontaktu a tvaru kontaktních povrchů stanoví velikost normálové síly  $N$ , délky hlavních poloos kontaktní elipsy  $a_{ce}$  a  $b_{ce}$  a maximální kontaktní tlak  $p_{max}$ .

#### 3.1.2. Algoritmus CONTACT - normálová část (NORM)

Možnosti použití algoritmu CONTACT [33, kap. 4], [34, kap. 5] jsou mnohem širší než u Hertzova řešení. Lze jej použít pro kontakt těles, jejichž tvar nelze nahradit tělesem s konstantní lokální křivostí (např. dvoubodový kontakt kola a kolejnice, když se okolek dotýká kolejnice) nebo pro tělesa z materiálů s rozdílnými mechanickými vlastnostmi.

#### Matice vzájemného vlivu elementů

Základem tohoto algoritmu je metoda hraničních prvků a teorie bodového zatížení elastického poloprostoru podle Boussinesqa a Cerrutiho [33, kap.4.3.2]. Plocha očekávané oblasti kontaktu je rozdělena na prvky a je sestavena matice jejich vzájemného působení  $A_{iJj}$ . Podle [34, str. 61] je ovlivnění prvku  $I$  v poloze  $\mathbf{x}_I (x_I, y_I)$  prvky v okolí vyjádřeno funkcí

$$B_{iJj}(x_I, y_I) = \frac{1}{\pi \cdot G} \cdot \int_{x_J - \Delta x}^{x_J + \Delta x} \int_{y_J - \Delta y}^{y_J + \Delta y} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{R} + \frac{(x' - x_I)^2}{R^3} & \frac{\nu \cdot (x' - x_I) \cdot (y' - y_I)}{R^3} & \frac{K \cdot (x' - x_I)}{R^2} \\ \frac{\nu \cdot (x' - x_I) \cdot (y' - y_I)}{R^3} & \frac{1-\nu}{R} + \frac{(y' - y_I)^2}{R^3} & \frac{K \cdot (y' - y_I)}{R^2} \\ -\frac{K \cdot (x' - x_I)}{R^2} & -\frac{K \cdot (y' - y_I)}{R^2} & \frac{1-\nu}{R} \end{bmatrix} dx' dy' \quad (3.20)$$

V matici této rovnice platí pro  $R$

$$R = \sqrt{(x' - x_I)^2 + (y' - y_I)^2} \quad (3.21)$$

$G$ ,  $\nu$  a  $K$  jsou kombinované materiálové vlastnosti, podobně jako v rovnicích 3.13 a 3.14:

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{2 \cdot G^{(1)}} + \frac{1}{2 \cdot G^{(2)}} \quad (3.22)$$

$$\nu = G \cdot \left( \frac{\nu^{(1)}}{2 \cdot G^{(1)}} + \frac{\nu^{(2)}}{2 \cdot G^{(2)}} \right) \quad (3.23)$$

$$K = \frac{G}{4} \cdot \left( \frac{1 - 2 \cdot \nu^{(1)}}{G^{(1)}} - \frac{1 - 2 \cdot \nu^{(2)}}{G^{(2)}} \right) \quad (3.24)$$

Výsledky jednotlivých integrálů jsou pak funkce podle zápisu

$$[[F(x_I, y_I)]] = \left[ [F(x_I, y_I)]_{x_I - x_J - \Delta x}^{x_I - x_J + \Delta x} \right]_{y_I - y_J - \Delta y}^{y_I - y_J + \Delta y} \quad (3.25)$$

Pro jednotlivé členy matice tedy

$$B_{1J1}(x_I, y_I) = \frac{1}{\pi \cdot G} \cdot [[y_I \cdot \ln(x_I + r) + (1 - \nu) \cdot x_I \cdot \ln(y_I + r)]] \quad (3.26)$$

$$B_{1J2}(x_I, y_I) = B_{2J1}(x_I, y_I) = \frac{1}{\pi \cdot G} \cdot [[-\nu \cdot r]] \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} B_{1J3}(x_I, y_I) &= -B_{3J1}(x_I, y_I) = \\ &= \frac{1}{\pi \cdot G} \cdot \left[ \left[ K \cdot \left( y_I \cdot \ln r + x_I \cdot \arctan \left( \frac{y_I}{x_I} \right) \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$B_{2J2}(x_I, y_I) = \frac{1}{\pi \cdot G} \cdot [[x_I \cdot \ln(y_I + r) + (1 - \nu) \cdot y_I \cdot \ln(x_I + r)]] \quad (3.29)$$



### 3. TEORIE VÝPOČTU SIL VE VALIVÉM KONTAKTU

$$\begin{aligned} B_{2J3}(x_I, y_I) &= -B_{3J2}(x_I, y_I) = \\ &= \frac{1}{\pi \cdot G} \cdot \left[ \left[ K \cdot \left( x_I \cdot \ln r + y_I \cdot \arctan \left( \frac{x_I}{y_I} \right) \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$B_{3J3}(x_I, y_I) = \frac{1}{\pi \cdot G} \cdot [(1 - \nu) \cdot (x_I \cdot \ln(y_I + r) + y_I \cdot \ln(x_I + r))] \quad (3.31)$$

kde

$$r = \sqrt{x_I^2 + y_I^2} \quad (3.32)$$

Pro prvky matice  $A_{IiJj}$  pak platí

$$A_{IiJj} = B_{iJj}(\mathbf{x}_I) = B_{iJj}(x_I, y_I) \quad (3.33)$$

Vztah mezi posuvy daného elementu a silovým zatížením je

$$u_{Ii} = \sum_{J=1}^N \sum_{j=1}^3 A_{IiJj} \cdot p_{Jj} \quad (3.34)$$

kde indexy  $I$  a  $J$  značí elementy a indexy  $i$  a  $j$  značí složku. Tak předchozí rovnice znamená, že posuv  $u_{Ii}$  je  $i$ -tá složka posuvu  $I$ -tého elementu a je sumou vlivů tlaků  $p_{Jj}$ , což jsou  $j$ -té složky  $J$ -tých elementů.

#### Algoritmus NORM

Jako vstupy do algoritmu slouží vzdálenost mezi nedeformovanými povrchy v jednotlivých prvcích  $h_I$ . Pro vzdálenost deformovaných povrchů  $e_I$  platí, že je součtem nedeformované vzdálenosti a posuvu

$$e_I = h_I + u_{I3} \quad (3.35)$$

Před samotným řešením normálového zatížení se započte vliv tečných sil:

$$h_I^* = h_I + \sum_{J,\tau} A_{I3J\tau} \cdot p_{J\tau} \quad (3.36)$$

Následuje vlastní algoritmus NORM. Celá oblast hraničněprvkové sítě  $Q$  je na začátku rozdělena na oblast vně kontaktní plochy  $E = Q$  a prázdnou kontaktní plochu  $C = \emptyset$ . Během řešení jsou množiny  $E$  a  $C$  upravovány, aby odpovídaly řešení.

V každém kroku je vyřešena soustava lineárních rovnic

$$e_I = h_I^* + \sum_J A_{I3J3} \cdot p_{J3} \quad (3.37)$$

přičemž platí v oblasti kontaktu

$$e_I = 0 \quad \forall I \in C \quad (3.38)$$

a v oblasti vně kontaktní plochy

$$p_{J3} = 0 \quad \forall J \in E \quad (3.39)$$

### 3.2. SROVNÁNÍ METOD VÝPOČTU NORMÁLOVÝCH SIL

Na konci kroku se vyhodnotí, zda jednotlivé prvky jsou ve správné oblasti:

$$p_{J3} < 0 \Rightarrow J \in E \quad (3.40)$$

$$e_I < 0 \Rightarrow I \in C \quad (3.41)$$

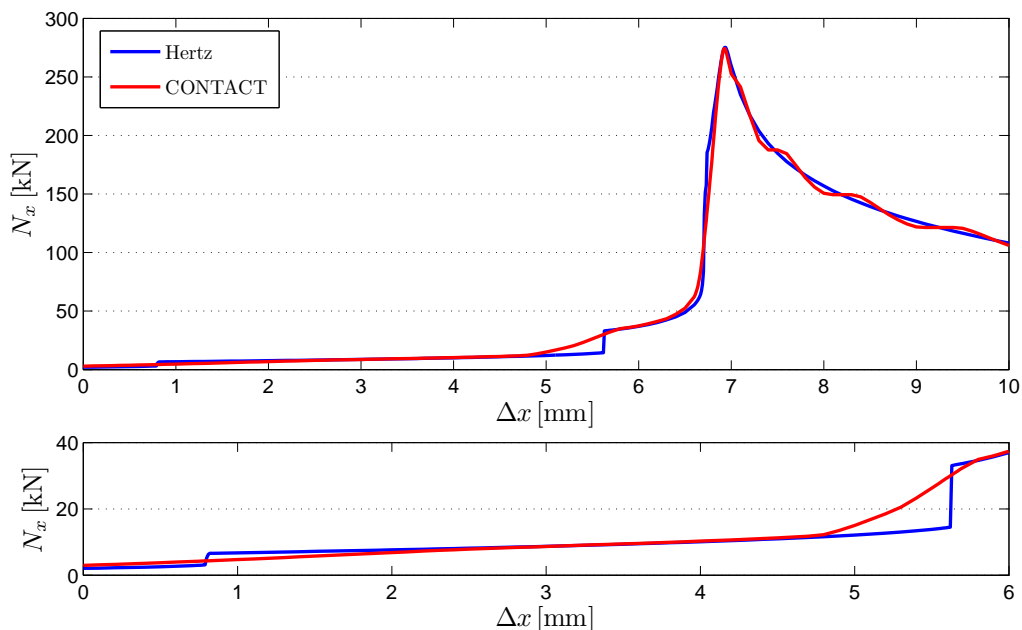
Po skončení algoritmu je normálová síla získána jako suma zatížení v elementech kontaktní plochy

$$N = \sum_{I \in C} p_{I3} \cdot dS_I \quad (3.42)$$

### 3.2. Srovnání metod výpočtu normálových sil

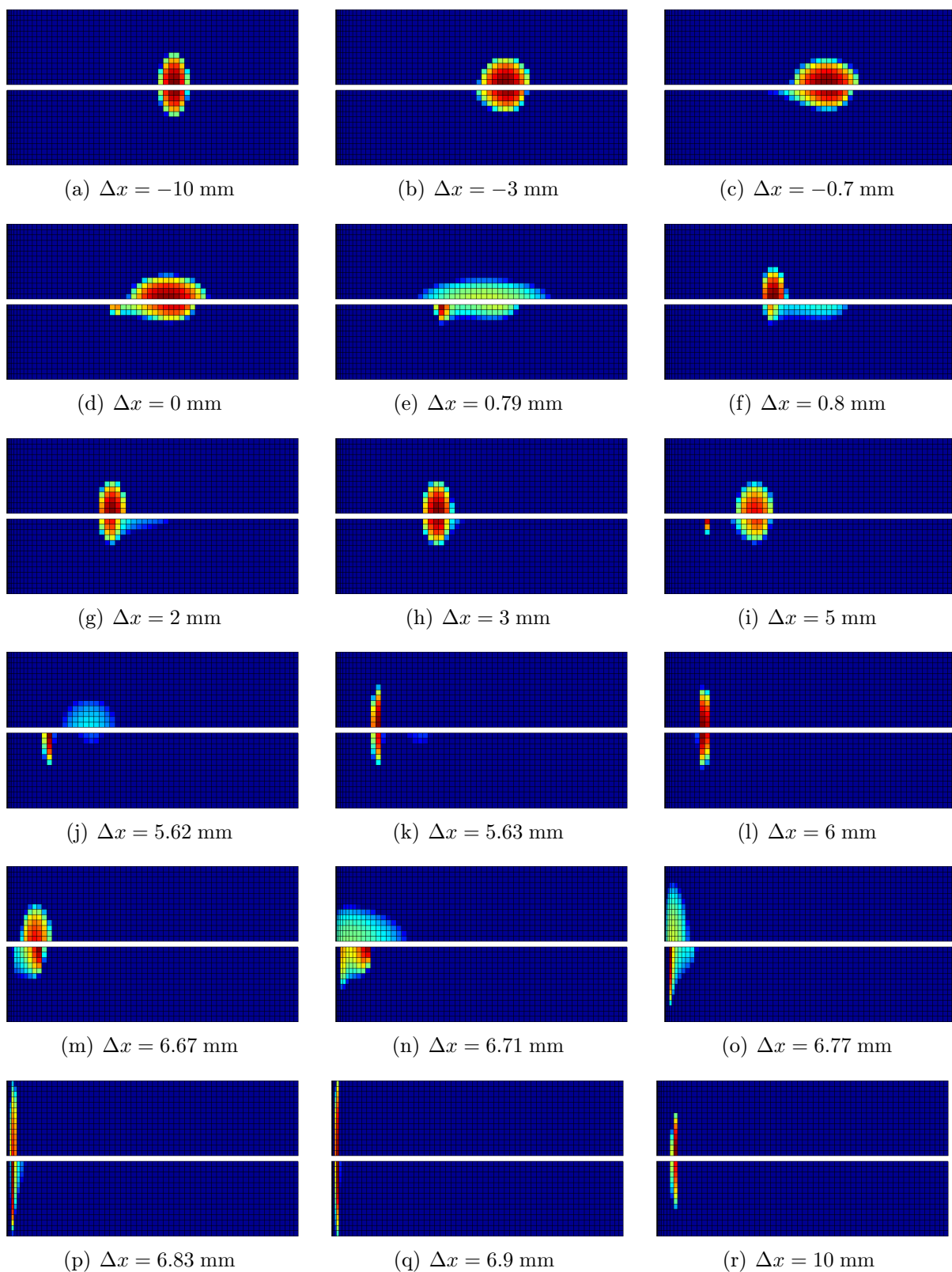
Hertzovo řešení normálové síly a algoritmus CONTACT je srovnáno na kontaktu železničního kola a kolejnice. Dvojkolí s poloměrem kol 0.46 m a profilem S1002 bylo umístěno do kontaktu s kolejnici s profilem UIC60 a sklonem uložení 1:40. Dvojkolí bylo posouváno kolmo na směr trati, byla zachováována svislá složka síly 100 kN (obvyklá zátěž na jedno kolo). Bylo zkoumáno normálové silové působení pro pravé kolo v závislosti na výchylce  $\Delta x$ . Závislosti pro síly v kontaktu levého kola a kolejnice jsou totožné, jen zrcadlově převrácené.

Výsledkem této studie je závislost složky normálové síly, která působí na dvojkolí a tlačí ho zpět do středu trati (viz obr. 3.3). Tato síla pozvolna narůstá, dokud nedojde ke kontaktu okolku a hrany kolejnice (při výchylce 6.6 až 6.9 mm). V tomto okamžiku síla působící do středu trati prudce vzroste, aby se předešlo vykojení. Za maximem při výchylce 6.9 mm už je v kontaktu pouze okolek a síla působící do středu pozvolna klesá, jak se dvojkolí posouvá dále ven z trati. Ze srovnání, jak tato závislost vypadá pro Hertzovo řešení a algoritmus CONTACT, lze rozpoznat silné a slabé stránky obou metod. Nevýhodou Hertzova řešení je to, že kontakt je soustředěn do jediného bodu, v kterém je globální minimum funkce vzdálenosti obou kontaktů. Vzhledem k tomu, že reálné geometrie železničního kola a kolejnice jsou poměrně složité tvary, uzpůsobené



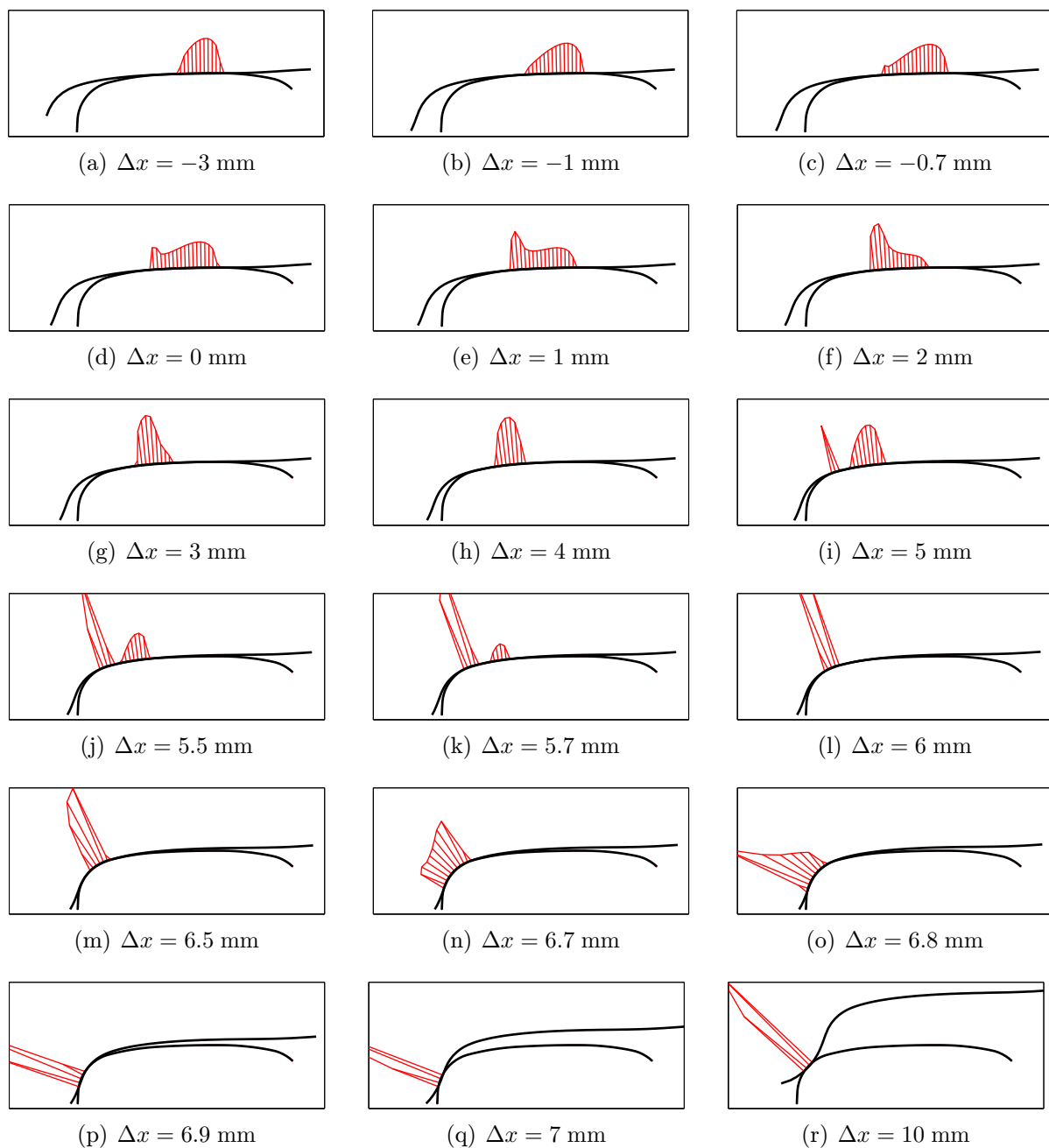
Obrázek 3.3: Závislost příčné složky normálové síly  $N_x$  na příčném vychýlení dvojkolí  $\Delta x$

### 3. TEORIE VÝPOČTU SIL VE VALIVÉM KONTAKTU



Obrázek 3.4: Rozložení normálového zatížení - srovnání Hertzova řešení (nahore) a algoritmu CONTACT (dole).

### 3.2. SROVNÁNÍ METOD VÝPOČTU NORMÁLOVÝCH SIL



Obrázek 3.5: Řez rozložením silového zatížení.

co nejnižšímu opotřebení, funkce jejich vzdálenosti má více lokálních minim. Jak se se změnou polohy dvojkolí mění vzájemná poloha povrchů v kontaktu, mění se poloha globálního minima, někdy skokem mezi dvěma lokálními minimy. To se projevuje jak na skokových změnách velikosti působící síly (obr. 3.3), tak na skokových změnách jejího působení. Tím, že algoritmus CONTACT uvažuje reálnou geometrii, je tento nedostatek vyřešen a ke skokovým změnám nedochází. Nevýhoda algoritmu CONTACT je pro změnu ukázána v oblasti, kdy kontakt kola a kolejnice je na okolku (výchylka 7 až 10 mm). V důsledku příliš hrubé sítě leží celá oblast kontaktu na oblasti o šířce jednoho nebo dvou elementů. Zde se složka působící do středu mění podle vlastností prvků, které jsou použity pro výpočet. Zato v případě Hertzova řešení se působení normálové síly přesouvá spojitě.

### 3. TEORIE VÝPOČTU SIL VE VALIVÉM KONTAKTU

Na obrázcích 3.4(a)-(r) jsou zobrazena rozložení normálového působení pro různé výchylky. V horní části každého obrázku je eliptické rozložení Hertzova řešení, ve spodní části skutečné, stanovené algoritmem CONTACT. Z těchto obrázků je patrné, že tvar kontaktní plochy se většinou liší od elipsy a často je dvoubodový. Hertzovo řešení většinou postihne aspoň část kontaktní plochy, ovšem při kontaktu za dotyku okolku a hrany kolejnice má velké odchylky od skutečného tvaru. To je významný nedostatek, protože právě v této oblasti dochází k největšímu opotřebení.

Na obrázcích 3.5(a)-(r) je zobrazeno rozložení silového působení ve svislém řezu. Jednotlivé špičky kontaktních tlaků odpovídají lokálním minimům funkce vzdálenosti povrchů kola a kolejnice.

### 3.3. Tečné zatížení

Tečné silové působení je důsledkem tření mezi povrchy v kontaktu. Při valení může docházet v zásadě ke dvěma způsobům, jak dochází k přenosu sil mezi tělesy. První se uskutečňuje, když alespoň na části kontaktní plochy materiál valícího se tělesa drží na jednom místě. Pak dochází k odvalování a vzájemný pohyb obou těles je minimální. Jiný případ nastává, když v celé kontaktní ploše dochází k prokluzu. Známým příkladem je prokluz pneumatik na ledu. V případě kontaktu kola a kolejnice je prokluz nežádoucím jevem, protože v jeho důsledku dochází k lokálnímu zahřívání, které vede k nárůstu napjatosti, změnám vlastností materiálu a porušování soudržnosti.

Jako vstupy pro metody stanovení tečných sil se používají rychlost valení  $V$  (používá se velikost rychlosti těžiště dvojkolí), relativní podélný skluz  $v_x$

$$v_x = \frac{v_{rel,x}}{V} \quad (3.43)$$

relativní příčný skluz  $v_y$

$$v_y = \frac{v_{rel,y}}{V} \quad (3.44)$$

a relativní spinový skluz  $\varphi_z$

$$\varphi_z = \frac{\omega_3}{V} \quad (3.45)$$

#### 3.3.1. Kalkerova lineární teorie valivého kontaktu

Kalkerova lineární teorie valivého kontaktu [33, str. 65] předpokládá, že v kontaktní ploše nedochází k prokluzu. Tečné síly a spinový moment pak mají lineární závislost na skluzech:

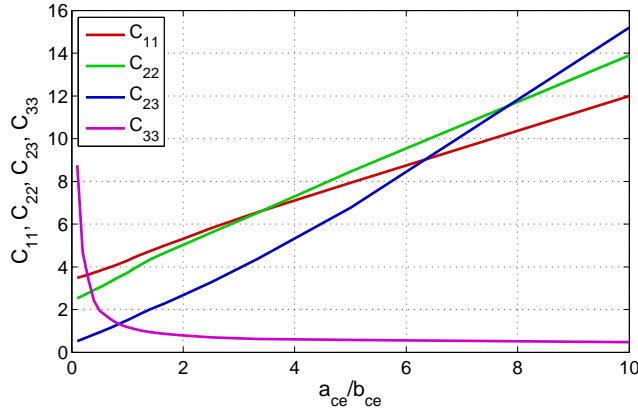
$$T_x = -G \cdot a_{ce} \cdot b_{ce} \cdot C_{11} \cdot v_x \quad (3.46)$$

$$T_y = -G \cdot a_{ce} \cdot b_{ce} \cdot C_{22} \cdot v_y - G \cdot (a_{ce} \cdot b_{ce})^{\frac{3}{2}} \cdot C_{23} \cdot \varphi_z \quad (3.47)$$

$$M_z = -G \cdot (a_{ce} \cdot b_{ce})^{\frac{3}{2}} \cdot C_{32} \cdot v_y - G \cdot (a_{ce} \cdot b_{ce})^2 \cdot C_{33} \cdot \varphi_z \quad (3.48)$$

Zde  $C_{11}$ ,  $C_{22}$ ,  $C_{23} = -C_{32}$  a  $C_{33}$  jsou Kalkerovy skluzové koeficienty, které jsou závislé na délkách hlavních poloos  $a_{ce}$  a  $b_{ce}$  stanovených rovnicemi 3.15 a 3.16. Byly vypočítány numericky pomocí algoritmu CONTACT a tabelovány (např. v [32, příl. 5] a [33, příl. E]).

### 3.3. TEČNÉ ZATÍŽENÍ



Obrázek 3.6: Kalkerovy koeficienty.

#### 3.3.2. Model podle Shena, Hedricka a Elkinse

Model podle Shena, Hedricka a Elkinse [60] spojuje Kalkerovu lineární teorii (kap. 3.3.1) a teorii Vermeulena a Johnsona [33, kap. 2.2.3.1]. Teorie Vermeulena a Johnsona zavádí saturaci na vazbu adheze, takže tečná síla může mít nejvýše hodnotu

$$T = f \cdot N \quad (3.49)$$

Tu zajišťuje tím, že tečné síly v kontaktu určené v lineární teorii (viz 3.46 a 3.47) přepočítá následujícím způsobem:

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} \quad (3.50)$$

$$w' = \frac{T}{3 \cdot f \cdot N} \quad (3.51)$$

$$\bar{T} = \begin{cases} f \cdot N \cdot [1 - (1 - w')^2] & \text{pro } w' \leq 1 \\ f \cdot N & \text{pro } w' > 1 \end{cases} \quad (3.52)$$

$$\bar{T}_x = \frac{T_x}{T} \cdot \bar{T} \quad (3.53)$$

$$\bar{T}_y = \frac{T_y}{T} \cdot \bar{T} \quad (3.54)$$

Saturovaná tečná síla v kontaktu pak má složky  $\bar{T}_x$  a  $\bar{T}_y$ . Spinový moment tento model tečných sil neuvažuje.

#### 3.3.3. Poláchův model

Poláchův model [56] je analytický model vytvořený za účelem zrychlení výpočtů, při kterých jsou používány numerické metody FASTSIM (kap. 3.3.4) nebo CONTACT (kap. 3.1.2 a 3.3.5). Teoretickým základem této metody je transformace rozložení normálového zatížení z tvaru poloelipsoidu, který předpokládá Hertzova teorie, na tvar polokoule. Dále je tato metoda zkombinována s lineární teorií valivého kontaktu (kap. 3.3.1).

V algoritmu se jako vstupy používají relativní skluzu  $v_x$  (3.43),  $v_y$  (3.44) a  $\varphi_z$  (3.45)

### 3. TEORIE VÝPOČTU SIL VE VALIVÉM KONTAKTU

a Kalkerovy skluzové koeficienty (viz kap. 3.3.1). Nejprve je do příčného relativního skluzu započítán vliv spinu:

$$|v_y + \varphi_z \cdot a_{ce}| > |v_y| \Rightarrow v_{y,c} = v_y + \varphi_z \cdot a_{ce} \quad (3.55)$$

$$|v_y + \varphi_z \cdot a_{ce}| \leq |v_y| \Rightarrow v_{y,c} = v_y \quad (3.56)$$

a poté je stanovena velikost relativního skluzu

$$v_c = \sqrt{v_x^2 + v_{y,c}^2} \quad (3.57)$$

Kalkerovy koeficienty pro příčný a podélný skluz jsou spojeny do jedné proměnné:

$$C_{jj} = \sqrt{\frac{C_{11}^2 \cdot v_x^2 + C_{22}^2 \cdot v_y^2}{v_x^2 + v_y^2}} \quad (3.58)$$

Dále je určen gradient růstu tečného zatížení v oblasti adheze  $\varepsilon_p$ :

$$\varepsilon_p = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{G \cdot a_{ce} \cdot b_{ce} \cdot C_{jj} \cdot v_c}{f \cdot N} \quad (3.59)$$

kde  $G$  je modul pružnosti ve smyku,  $a_{ce}$  a  $b_{ce}$  jsou délky hlavních poloos kontaktní elipsy (rov. 3.15 a 3.16),  $f$  je součinitel smykového tření a  $N$  je normálová síla v kontaktu (3.18). Tečná síla v podélném směru  $T_x$  je

$$T_x = -N \cdot \frac{2 \cdot f}{\pi} \cdot \left( \frac{\varepsilon_p}{1 + \varepsilon_p^2} + \arctan \varepsilon_p \right) \cdot \frac{v_x}{v_c} \quad (3.60)$$

Složka tečné síly v příčném směru způsobená příčným skluzem  $T_{y,p}$  je

$$T_{y,p} = -N \cdot \frac{2 \cdot f}{\pi} \cdot \left( \frac{\varepsilon_p}{1 + \varepsilon_p^2} + \arctan \varepsilon_p \right) \cdot \frac{v_y}{v_c} \quad (3.61)$$

Vliv spinu na příčnou složku tečné síly  $T_{y,s}$  je určen samostatně. Nejprve je určen gradient tečného zatížení v důsledku spinu  $\varepsilon_s$ :

$$k_s = 1 + 6.3 \cdot \left( 1 - e^{-\frac{a_{ce}}{b_{ce}}} \right) \quad (3.62)$$

$$\varepsilon_s = \frac{8}{3} \cdot \frac{G \cdot b_{ce} \cdot \sqrt{a_{ce} \cdot b_{ce}}}{f \cdot N} \cdot \frac{C_{23} \cdot v_{y,c}}{k_s} \quad (3.63)$$

poté už lze určit  $T_{y,s}$ :

$$\delta = \frac{\varepsilon_s^2 - 1}{\varepsilon_s^2 + 1} \quad (3.64)$$

$$T_{y,s} = -N \cdot \frac{9}{16} \cdot a_{ce} \cdot f \cdot k_s \cdot \left[ \varepsilon_s \cdot \left( -\frac{\delta^3}{3} + \frac{\delta^2}{2} - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(1 - \delta^2)^3} \right] \cdot \frac{\varphi_z}{v_c} \quad (3.65)$$

Zbývá už jen sečíst vliv příčného skluzu a spinu

$$T_y = T_{y,p} + T_{y,s} \quad (3.66)$$

### 3.3. TEČNÉ ZATÍŽENÍ

#### 3.3.4. Algoritmus FASTSIM

Algoritmus FASTSIM je numerická metoda vyvinutá profesorem Kalkerem [33, kap. 3], [34, kap. 4]. Tato metoda vychází ze zjednodušené teorie valivého kontaktu. V této teorii je povrch tělesa nahrazen tenkou pružnou vrstvou a oblast kontaktu rozdělena na elementy, které představují pružiny schopné stlačení (normálové zatížení) i ohybu (tečné zatížení). Poddajnosti v ohybu pro jednotlivé skluzy se na základě srovnání zjednodušené a lineární teorie kontaktu (kap. 3.3.1) stanoví takto:

$$(v_x) : L_1 = \frac{8 \cdot a_{ce}}{3 \cdot G \cdot C_{11}} \quad (3.67)$$

$$(v_y) : L_2 = \frac{8 \cdot a_{ce}}{3 \cdot G \cdot C_{22}} \quad (3.68)$$

$$(\varphi_z) : L_3 = \frac{\pi \cdot a_{ce}^2}{4 \cdot G \cdot C_{23} \cdot \sqrt{a_{ce} \cdot b_{ce}}} \quad (3.69)$$

Celková poddajnost elementu  $L$  pak je

$$L = \frac{L_1 \cdot |v_x| + L_2 \cdot |v_y| + L_3 \cdot |\varphi_z| \cdot \sqrt{a_{ce} \cdot b_{ce}}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + a_{ce} \cdot b_{ce} \cdot \varphi_z^2}} \quad (3.70)$$

Skluzové rychlosti pro jednotlivé elementy se stanoví pomocí relativních skluzů:

$$c_{I,1} = (v_x - y_I \cdot \varphi_z) \cdot V \quad (3.71)$$

$$c_{I,2} = (v_y + x_I \cdot \varphi_z) \cdot V \quad (3.72)$$

Zde  $x_I$  a  $y_I$  jsou souřadnice polohy elementu vzhledem ke středu kontaktní elipsy. Tečné zatížení v oblasti adheze se stanoví podle výrazu

$$p_{I\tau}^H(t) = p_{I\tau} \cdot (t - dt) - \frac{dt}{L} \cdot c_{I\tau} \quad (3.73)$$

V oblasti prokluzu má tečné zatížení velikost vazby adheze

$$g_I = f \cdot p_{I3} = f \cdot p_{max} \cdot \left(1 - \frac{x_I^2}{a_{ce}^2} - \frac{y_I^2}{b_{ce}^2}\right) \quad (3.74)$$

kde  $p_{max}$  je maximální normálový tlak v kontaktní ploše, stanovený podle zjednodušené teorie:

$$p_{max} = \frac{2 \cdot N}{\pi \cdot a_{ce} \cdot b_{ce}} \quad (3.75)$$

Tečné zatížení a skutečný skluz pak jsou

$$p_{I\tau}^S = \frac{p_{I\tau}^H}{\|p_{I\tau}^H\|} \cdot g_I \quad (3.76)$$

$$s_{I\tau} = c_{I\tau} + \frac{L}{dt} \cdot [p_{I\tau}^S(t) - p_{I\tau}(t - dt)] \quad (3.77)$$

Tečné síly v kontaktu jsou sumou zatížení v jednotlivých elementech

$$T_x = \sum_I p_{I,1} \cdot dS_I \quad (3.78)$$

$$T_y = \sum_I p_{I,2} \cdot dS_I \quad (3.79)$$

$$M_z = \sum_I (x_I \cdot p_{I,2} - y_I \cdot p_{I,1}) \cdot dS_I \quad (3.80)$$



### 3.3.5. Algoritmus CONTACT - tečná část (TANG)

Algoritmus TANG je druhou částí algoritmu CONTACT [33, kap. 4], [34, kap. 5]. Jako jeho vstupy jsou tedy použity výstupy algoritmu NORM (kap. 3.1.2) - normálová zatížení  $p_{I3}$  a množina příslušnosti elementů do kontaktní plochy  $C$ .

Pro algoritmus TANG je nutné kromě matice vlivu  $A_{IiJj}$ , která platí pro aktuální časový okamžik, stanovit ještě matici vlivu  $B_{IiJj}$ , která vyjadřuje vliv silového působení v kontaktu v dřívějším čase. Rozdíl těchto okamžiků  $dt$  je závislý na velikosti elementů ( $2 \cdot dx$ ) a rychlosti valení  $V$ :

$$dt = \frac{2 \cdot dx}{V} \quad (3.81)$$

Zatímco matice  $A_{IiJj}$  je stanovena pro polohy elementů  $\mathbf{x}_I$ , matice  $B_{IiJj}$  pro polohy elementů  $\mathbf{x}_I + \mathbf{v} \cdot dt$ . Posledními vstupy do algoritmu jsou relativní rychlosti pro jednotlivé elementy  $c_{I\tau}$ .

Skutečný skluz v daném elementu se určí pomocí rovnice

$$s_{I\tau} = c_{I\tau} + \frac{A_{I\tau Jj} \cdot p_{Jj}(t) - B_{I\tau Jj} \cdot p_{Jj}(t - dt)}{dt} \quad (3.82)$$

Pro oblast adheze  $H$  platí

$$s_{I\tau} = 0 \quad \forall I \in H \quad (3.83)$$

a pro oblast prokluzu  $S$  platí podmínky

$$s_{I\tau} = -S_I \cdot \frac{p_{I\tau}}{f \cdot p_{I3}} \quad \forall I \in S \quad (3.84)$$

$$\sqrt{p_{I1}^2 + p_{I2}^2} = f \cdot p_{I3} \quad \forall I \in S \quad (3.85)$$

kde  $S_I$  je velikost skluzu.

Na začátku algoritmu se uvažuje, že oblast adheze  $H$  pokrývá celou kontaktní plochu, tedy  $H = C$ , a oblast prokluzu  $S$  je prázdná ( $S = \emptyset$ ). V prvním kroku se pak řeší lineární soustava rovnic:

$$0 = c_{I\tau} + \frac{A_{I\tau Jj} \cdot p_{Jj}(t) - B_{I\tau Jj} \cdot p_{Jj}(t - dt)}{dt} \quad (3.86)$$

Její řešení pro kontaktní plochu tvaru elipsy je numerické řešení Kalkerovy lineární teorie. V dalších krocích se řeší soustava složená z lineárních rovnic pro oblast adheze (3.86) a nelineárních rovnic pro oblast skluzu (rovnice složené z 3.82 a 3.84 a vazba adheze 3.85). Na konci kroku se opět kontroluje příslušnosti k jednotlivým oblastem:

$$\sqrt{p_{I1}^2 + p_{I2}^2} > f \cdot p_{I3} \Rightarrow I \in S \quad (3.87)$$

$$S_I < 0 \Rightarrow I \in H \quad (3.88)$$

Tečné síly se pak určí

$$T_x = \sum_I p_{I,1} \cdot dS_I \quad (3.89)$$

$$T_y = \sum_I p_{I,2} \cdot dS_I \quad (3.90)$$

### 3.4. SROVNÁNÍ METOD VÝPOČTU TEČNÝCH SIL V KONTAKTU

## 3.4. Srovnání metod výpočtu tečných sil v kontaktu

Srovnání vlastností jednotlivých metod stanovení tečného silového působení bylo provedeno na jednoduchém příkladu valivého kontaktu dvou kulových ploch. Jejich velikost a vzájemná poloha byla zvolena tak, aby normálová síla podle Hertzova řešení byla 100 000 N a délky hlavních poloos kontaktní elipsy byly  $a_{ce} = b_{ce} = 6$  mm. Tělesa v kontaktu jsou z oceli ( $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Pa,  $\mu = 0.3$ ,  $f = 0.3$ ). Pro algoritmus CONTACT byla použita síť s prvky o velikosti 0.44 mm, pro algoritmus FASTSIM síť s prvky o velikosti 0.33 mm. Normálová síla stanovená algoritmem CONTACT má velikost 100 015 N.

### 3.4.1. Prostý podélný skluz

Při prostém podélném skluzu velikost tečné síly nejprve lineárně roste v souladu s Kalkerovou lineární teorií, poté ovšem saturuje na hodnotě  $fN$ . Srovnání této závislosti pro různé metody je na obrázku 3.7.

Lineární řešení stanovené analyticky Kalkerovou lineární teorií a numericky algoritmem CONTACT nezohledňují skluz v kontaktu, adheze se udržuje po celé kontaktní elipse. V důsledku toho roste tečný tlak na výstupní hraně kontaktu k nekonečnu, což je patrné i na obrázku 3.8(b).

Při saturaci na mezi adheze je mírně strmější řešení algoritmem CONTACT, naopak řešení Poláchovým modelem dosahuje nižších hodnot. Rozdíl numerických metod FASTSIM (obr. 3.8(a)) a CONTACT (obr. 3.8(c)) je ten, že růst tečného zatížení v oblasti adheze je v algoritmu FASTSIM aproximován lineárně, zatímco skutečná závislost je nelineární. Po dosažení vazby adheze už velikost tečného napětí kopíruje v oblasti prokluzu tvar poloelipsoidu, který je dán součinem  $f \cdot p_n$  ( $f$  je součinitel smykového tření,  $p_n$  je velikost normálového tlaku). Oblast prokluzu má tvar měsíčního srpku při výstupní hraně. Jak s rostoucí hodnotou relativního podélného skluzu  $v_x$  narůstá, ukazují obrázky 3.9(a)-(d).

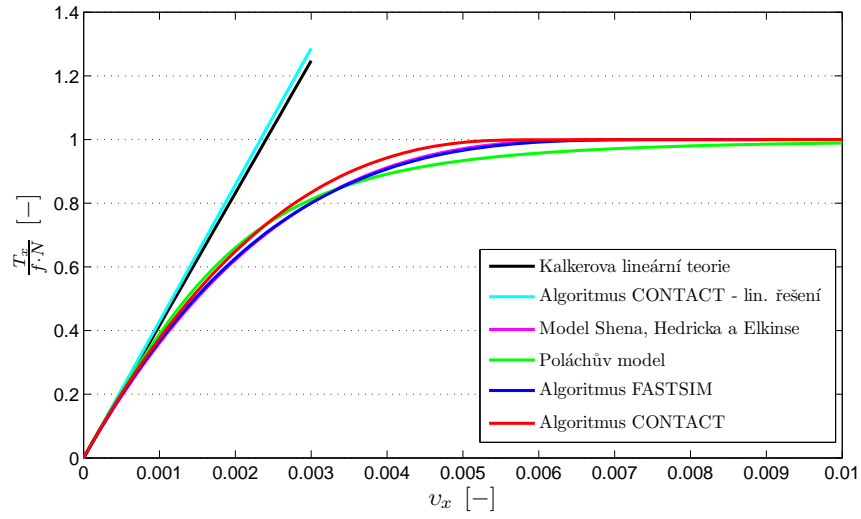
### 3.4.2. Prostý příčný skluz

Tečné síly v příčném směru narůstají v závislosti na skluzu podobně jako podélné (viz obr. 3.10). Velikost tečného tlaku se zvětšuje od vstupní k výstupní hraně, kde opět dochází k růstu do nekonečna pro lineární řešení nebo k saturaci na vazbě adheze. Růst sil je však mírnější, protože část silového působení se projeví v tečném momentu (viz obr. 3.11).

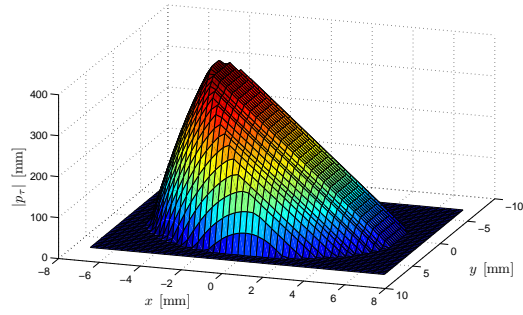
### 3.4.3. Prostý spin

Charakteristika tečného momentu při prostém spinu opět saturuje na maximální hodnotě (obr. 3.13), ovšem tečná síla postupně narůstá až k maximu při hodnotě relativního spinového skluzu  $\varphi_z = 1$  a poté zvolna klesá až nulové hodnotě při nekonečně velkém spinu. Tato závislost je zobrazena na obr. 3.12. Zde se objevují nevýhody analytických metod - model podle Shena, Hedricka a Elkinse pokles při velkém spinu vůbec nezachytí, Poláchův model jej uvažuje, ovšem v tomto případě velikost síly klesá příliš strmě.

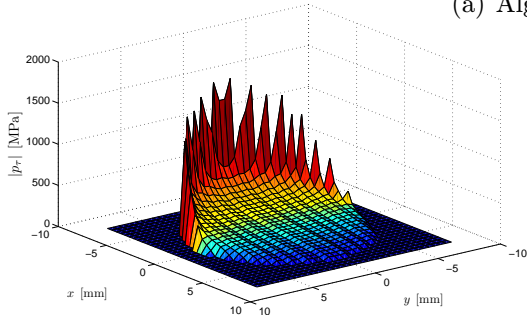
### 3. TEORIE VÝPOČTU SIL VE VALIVÉM KONTAKTU



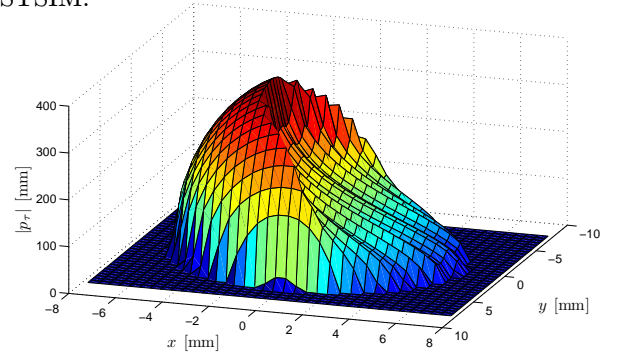
Obrázek 3.7: Závislost velikosti podélné tečné síly na podélném skluzu.



(a) Algoritmus FASTSIM.

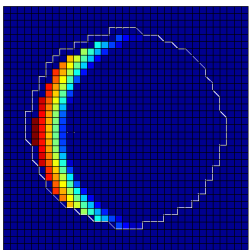


(b) Algoritmus CONTACT - lineární řešení.

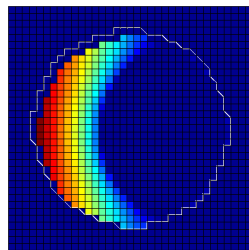


(c) Algoritmus CONTACT.

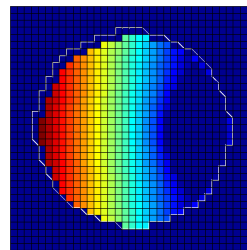
Obrázek 3.8: Rozložení tečného silového působení ( $v_x = 0.002$ ).



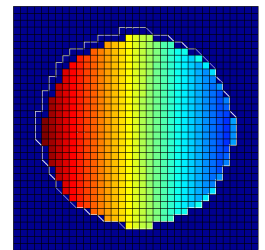
(a)  $v_x = 0.001$



(b)  $v_x = 0.002$



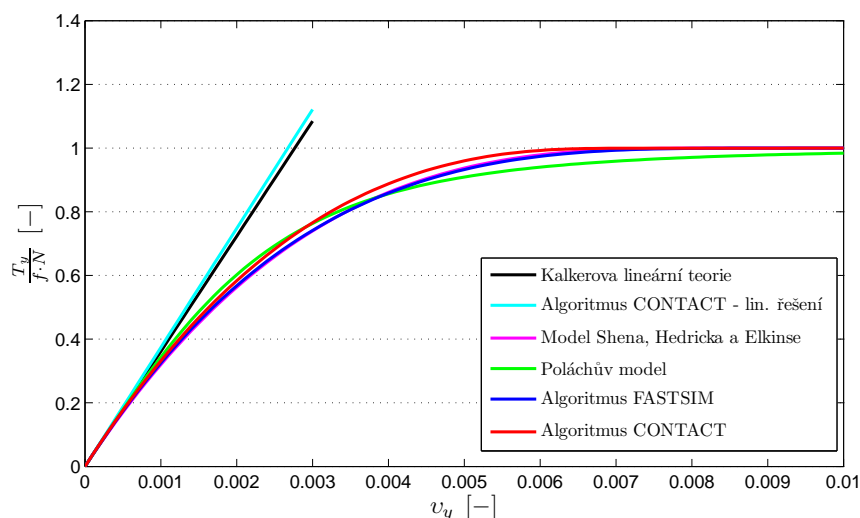
(c)  $v_x = 0.004$



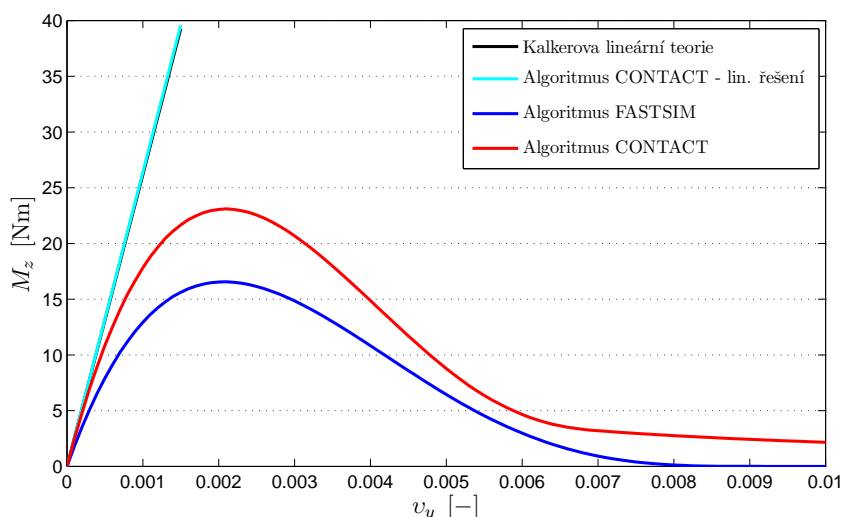
(d)  $v_x = 0.008$

Obrázek 3.9: Skutečný skluz v kontaktu při prostém podélném skluzu.

### 3.4. SROVNÁNÍ METOD VÝPOČTU TEČNÝCH SIL V KONTAKTU



Obrázek 3.10: Závislost velikosti příčné tečné síly na příčném skluzu.



Obrázek 3.11: Závislost velikosti tečného momentu na příčném skluzu.

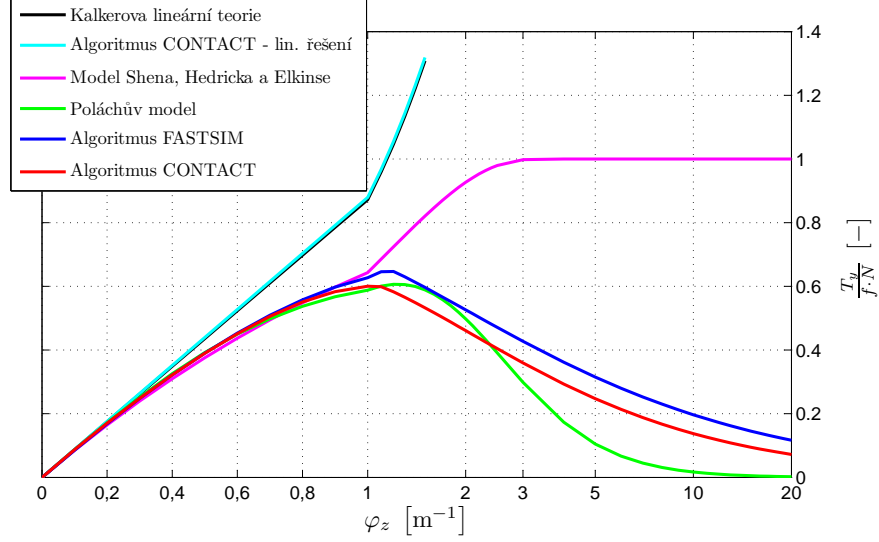
Chování v kontaktní elipse postihují obrázky 3.14(a)-(d). Oblast prokluzu vytváří úseče po obou stranách kontaktní elipsy, které se postupně spojí, až zůstane adheze pouze v malém bodě. Ten leží nejprve v blízkou výstupní hrany, později se přesune do středu kontaktní elipsy.

#### 3.4.4. Kombinovaný skluz

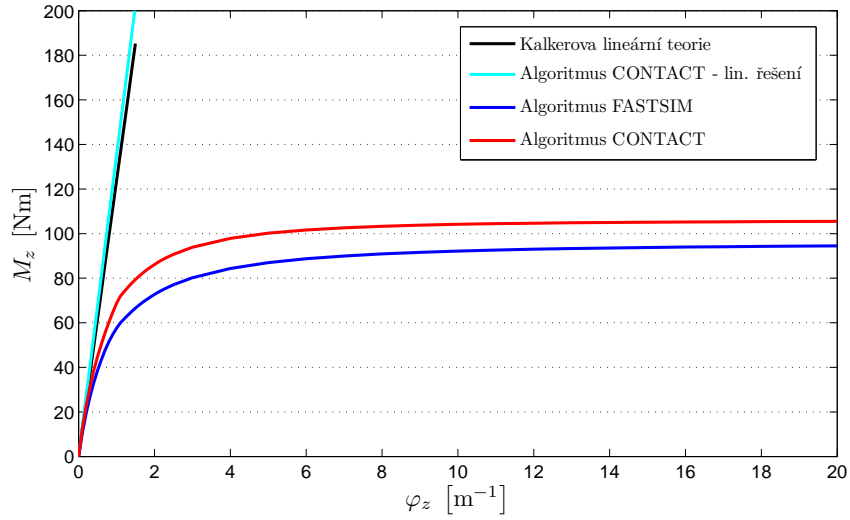
Při řešení obecného skluzu se zřetelně ukazují výhody a nevýhody jednotlivých metod. Výsledky algoritmu CONTACT jsou považovány za přesné řešení, ostatní metody jsou k nim přirovnány. Jednotlivé vlastnosti metod lze pozorovat při různé velikosti spinu (viz tabulka 3.1).

Pro prostý skluz ( $\varphi_z = 0$ ) má nejlepší výsledky model Shena, Hedricka a Elkinse, kdežto FASTSIM při kombinaci podélného a příčného skluzu dává nižší hodnoty, nejhorší výsledky jsou v případech, kdy podélný a příčný skluz mají stejnou hodnotu. To souvisí se stanovením ohybové poddajnosti  $L$  (viz rov. 3.70). S rostoucím spinem se výrazněji projevují vlastnosti jednotlivých metod. Pro malý spin mají dostačující přesnost

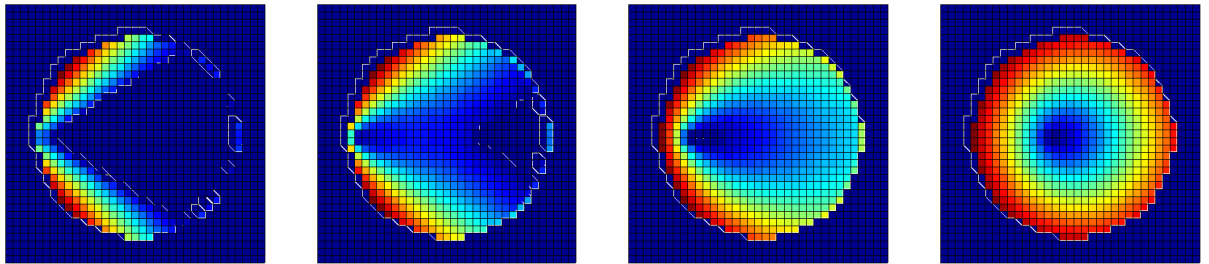
### 3. TEORIE VÝPOČTU SIL VE VALIVÉM KONTAKTU



Obrázek 3.12: Závislost velikosti příčné tečné síly na spinovém skluzu. Pozn. Graf má dvojitý měřítko  $\varphi_z$ : v intervalu  $\langle 0; 1 \rangle$  lineární, dále logaritmické.



Obrázek 3.13: Závislost velikosti tečného momentu na spinovém skluzu.



(a)  $\varphi_z = 0.5 \text{ m}^{-1}$

(b)  $\varphi_z = 1 \text{ m}^{-1}$

(c)  $\varphi_z = 2 \text{ m}^{-1}$

(d)  $\varphi_z = 10 \text{ m}^{-1}$

Obrázek 3.14: Skutečný skluz v kontaktu při prostém spinu.

### 3.4. SROVNÁNÍ METOD VÝPOČTU TEČNÝCH SIL V KONTAKTU

Poláchův model a algoritmus FASTSIM, pro velké spiny už lze použít pouze algoritmus FASTSIM, protože model podle Shena, Hedricka a Elkinse dává příliš velké hodnoty tečné síly, Poláchův model zase příliš malé a spinový moment neuvažuje ani jeden z nich.

SKLUZY			SHE		POLÁCH		FASTSIM		CONTACT	
$\varphi_z$	$v_x$	$v_y$	$T_x$	$T_y$	$T_x$	$T_y$	$T_x$	$T_y$	$T_x$	$T_y$
0	0.001	0.001	-10323	-8976	-10438	-10438	-7307	-7307	-10713	-9358
0	0.001	0.004	-7264	-25261	-6307	-25229	-5858	-23433	-7298	-26087
0	0.004	0.001	-26941	-5856	-26091	-6523	-24405	-6101	-27782	-6223
0	0.004	0.004	-22216	-19316	-19988	-19988	-18731	-18731	-22004	-20190
0.5	0.001	0	-10136	-10632	-7859	-11163	-7973	-9027	-8329	-11509
0.5	0.001	0.001	-9108	-17472	-6426	-16977	-6560	-14432	-8063	-19119
0.5	0.001	0.004	-6176	-27956	-4076	-24009	-4792	-25238	-5777	-28523
0.5	0.004	0.001	-25505	-12232	-20148	-12727	-20896	-11282	-24915	-13798
0.5	0.004	0.004	-19779	-22384	-14534	-21291	-16402	-21359	-18786	-22701
2	0.001	0	-6503	-27284	-2475	-14885	-3271	-16355	-2920	-13764
2	0.001	0.001	-5677	-28755	-2287	-15034	-3154	-19101	-2872	-15978
2	0.001	0.004	-3877	-29748	-1864	-15487	-2756	-23907	-2690	-21406
2	0.004	0.001	-18571	-23516	-8781	-14415	-11987	-18540	-11210	-14986
2	0.004	0.004	-13867	-26603	-7253	-15062	-10499	-22927	-10484	-20340

Tabulka 3.1: Velikosti tečných sil pro různé kombinace skluzů.

### 3.5. Shrnutí

V předchozí kapitole byly prezentovány metody pro stanovení silového působení v kontaktu použitelné pro tuto práci. Jejich stručný přehled, doplněný o srovnání s metodou konečných prvků je v tabulce 3.2.

<i>Metoda</i>	<i>Typ metody</i>	<i>Kont. plocha</i>	<i>Výstupy</i>	<i>Náročnost</i>
<b>Normálové zatížení</b>				
Hertzovo řešení	analytická	elipsa	normálová síla, rozměry kontaktní elipsy	nízká
Algoritmus NORM	numerická	obecná	rozložení zatížení v kontaktu	vysoká
MKP	numerická	obecná	rozložení zatížení v kontaktu, napjatost v tělesech	velmi vysoká
<b>Tečné zatížení</b>				
Lineární teorie	analytická	elipsa	tečné síly a spinový moment bez prokluzu	nízká
Model Shen et al.	analytická	elipsa	tečné síly s prokluzem, bez spinu	nízká
Poláchův model	analytická	elipsa	tečné síly s prokluzem, se spinem	nízká
Algoritmus FASTSIM	numerická	elipsa	přibližné rozložení zatížení v kontaktu	střední
Algoritmus TANG	numerická	obecná	rozložení zatížení v kontaktu	vysoká
MKP	numerická	obecná	rozložení zatížení v kontaktu, napjatost v tělesech	velmi vysoká

Tabulka 3.2: Srovnání metod výpočtu sil v kontaktu.

### 3.5. *SHRNUTÍ*

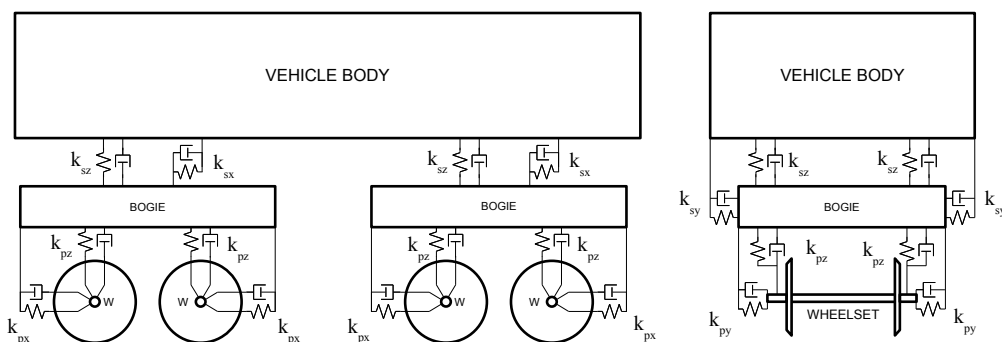


## 4. Výpočtový model

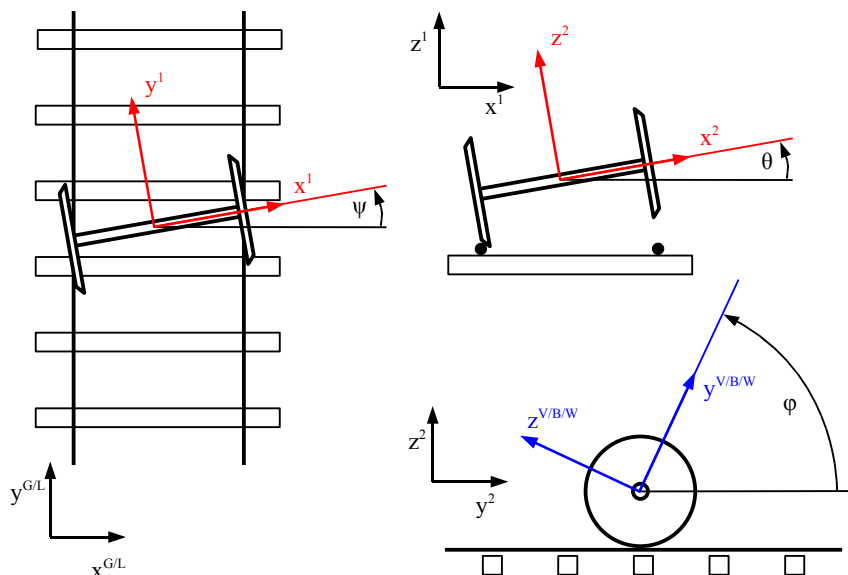
V této kapitole je prezentován výpočtový model použitý pro zjištění projevů v kontaktu kola a kolejnice. Model je složen ze tří hlavních částí: dráhy, vozidla a detailu kontaktů mezi koly a kolejnicemi. U dráhy nás zajímá její celkový tvar, který ovlivňuje pohyb vozidla a odstředivé síly, směr působení tíhové síly. Dále dynamické vlastnosti kolejového svršku, tzn. vliv uložení pražců a kolejnic na tlumení vibrací způsobených projíždějícím vozidlem. Pohyb vozidla je modelován jako prostorový pohyb soustavy tuhých těles, přičemž vazba mezi vozidlem a dráhou se uskutečňuje pomocí řešení kontaktních sil, které jsou řešeny podrobněji.

### 4.1. Dynamika vozidla

Pohyb vozidla je modelován jako prostorový pohyb soustavy tuhých těles, a to vlastního tělesa vozidla, podvozků a dvojkolí (viz obr. 4.1). Poloha každého tělesa je popsána 6 stupni volnosti, a to polohou těžiště tělesa a trojicí Eulerových úhlů pro postupné rotace Z-Y-X: bočení  $\psi$  (angl. *yaw*, rotace kolem osy Z), klopení  $\theta$  (angl. *pitch*, rotace kolem osy Y) a klonění  $\varphi$  (angl. *roll*, rotace kolem osy X). Odvození transformací je v příloze B. Vazby mezi tělesy jsou tvořeny členy pružina-tlumič, jak je naznačeno na



Obrázek 4.1: Schéma modelu vozidla.



Obrázek 4.2: Úhly natočení vozidla, podvozků a dvojkolí.

#### 4.1. DYNAMIKA VOZIDLA

obr. 4.1. Takto jsou definovány poloha těžiště vozidla  $\mathbf{x}_v^G$  a rychlost vozidla  $\dot{\mathbf{x}}_v^G$  a transformační matice ze souřadného systému svázaného s vozidlem do globálního souřadného systému  $\mathbf{C}_{VG}$  a její derivace  $\dot{\mathbf{C}}_{VG}$ . Obdobně je dána poloha a rychlost podvozků ( $\mathbf{x}_{b,i}^G, \dot{\mathbf{x}}_{b,i}^G, \mathbf{C}_{BG,i}, \dot{\mathbf{C}}_{BG,i}$ ) a poloha a rychlost dvojkolí ( $\mathbf{x}_{w,j}^G, \dot{\mathbf{x}}_{w,j}^G, \mathbf{C}_{WG,j}, \dot{\mathbf{C}}_{WG,j}$ ). Indexy  $G, V, B, W$  (horní index u polohy, dolní index u transformační matice) označují použitý souřadný systém, a to globální (G), vozidla (V), podvozku (B) a dvojkolí (W). Indexy  $v, b, w$  značí těžiště vozidla (v), podvozku (b) nebo dvojkolí (w) a indexy  $i, j$  jsou určeny pro identifikaci konkrétního podvozku (i) nebo dvojkolí (j).

Vazby mezi jednotlivými tělesy jsou tvořeny vždy několika členy typu pružina-tlumič. Takto jsou mezi dvojkolími a podvozky vytvořena primární odpružení (označení  $P$ , index  $k$ ) a mezi podvozky a vlastním vozidlem sekundární odpružení (označení  $S$ , index  $l$ ). Každý člen typu pružina-tlumič má definováno několik parametrů, které se použijí pro výpočet sil: rovnovážná délka pružiny  $x_0$ , rovnovážná síla v pružině  $F_0$ , matice tuhosti pružiny  $K$ , matice tlumení  $B$ , transformační matice mezi lokálním souřadným systémem vazby a globálním souřadným systémem  $\mathbf{C}_{PG,k}$  a  $\mathbf{C}_{SG,l}$ , resp. její derivace  $\dot{\mathbf{C}}_{PG,k}$  a  $\dot{\mathbf{C}}_{SG,l}$ .

Poloha uchycení pružin na příslušném těles je vždy daná konstrukcí vozidla a silové působení v odpružení závisí na tom, jaká je vzájemná poloha a rychlost obou těles spojených pružinou, resp. obou konců členu pružina-tlumič. Polohy uchycení pružin jsou: uchycení primárního odpružení na dvojkolí  $\mathbf{x}_{pw,k}^W$ , uchycení primárního odpružení na podvozku  $\mathbf{x}_{pb,k}^B$ , uchycení sekundárního odpružení na podvozku  $\mathbf{x}_{sb,l}^B$  a uchycení sekundárního odpružení na vozidle  $\mathbf{x}_{sv,l}^V$ . Indexy  $V, B, W$  opět udávají souřadný systém, indexy  $p, s$  rozlišují primární a sekundární odpružení, indexy  $v, b, w$  určují, zda daný bod patří k vozidlu, podvozku nebo dvojkolí, a indexy  $k, l$  specifikují konkrétní pár pružina-tlumič.

Aby se určily síly v těchto vazbách, musí se určit vzájemná poloha obou konců odpružení v souřadném systému daného prvku odpružení. Nejprve se polohy a rychlosti všech bodů převedou do globálního souřadného systému:

$$\mathbf{x}_{pb,k}^G = \mathbf{C}_{BG,i} \cdot \mathbf{x}_{pb,k}^B + \mathbf{x}_{b,i}^G \quad (4.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{pb,k}^G = \dot{\mathbf{C}}_{BG,i} \cdot \mathbf{x}_{pb,k}^B + \dot{\mathbf{x}}_{b,i}^G \quad (4.2)$$

$$\mathbf{x}_{pw,k}^G = \mathbf{C}_{WG,j} \cdot \mathbf{x}_{pw,k}^W + \mathbf{x}_{w,j}^G \quad (4.3)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{pw,k}^G = \dot{\mathbf{C}}_{WG,j} \cdot \mathbf{x}_{pw,k}^W + \dot{\mathbf{x}}_{w,j}^G \quad (4.4)$$

$$\mathbf{x}_{sv,l}^G = \mathbf{C}_{VG} \cdot \mathbf{x}_{sv,l}^V + \mathbf{x}_v^G \quad (4.5)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{sv,l}^G = \dot{\mathbf{C}}_{VG} \cdot \mathbf{x}_{sv,l}^V + \dot{\mathbf{x}}_v^G \quad (4.6)$$

$$\mathbf{x}_{sb,l}^G = \mathbf{C}_{BG,i} \cdot \mathbf{x}_{sb,l}^B + \mathbf{x}_{b,i}^G \quad (4.7)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{sb,l}^G = \dot{\mathbf{C}}_{BG,i} \cdot \mathbf{x}_{sb,l}^B + \dot{\mathbf{x}}_{b,i}^G \quad (4.8)$$

V použitém modelu je primární i sekundární odpružení spojeno s podvozkem napevno, proto platí

$$\mathbf{C}_{PG,k} = \mathbf{C}_{BG,j} \text{ pro } k \equiv j \quad (4.9)$$

$$\mathbf{C}_{SG,l} = \mathbf{C}_{BG,j} \text{ pro } l \equiv j \quad (4.10)$$

#### 4. VÝPOČTOVÝ MODEL

Síly v odpružení pak jsou stanoveny v souřadném systému svázaným s prvkem odpružení

$$\mathbf{F}_{Kp,k}^P = \mathbf{K}_p \cdot [\mathbf{C}_{PG,k}^T \cdot (\mathbf{x}_{pb,k}^G - \mathbf{x}_{pw,k}^G) - \mathbf{x}_{0,p}] + \mathbf{F}_{0,p} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{F}_{Bp,k}^P = \mathbf{B}_p \cdot [\dot{\mathbf{C}}_{PG,k}^T \cdot (\mathbf{x}_{pb,k}^G - \mathbf{x}_{pw,k}^G) + \mathbf{C}_{PG,k}^T \cdot (\dot{\mathbf{x}}_{pb,k}^G - \dot{\mathbf{x}}_{pw,k}^G)] \quad (4.12)$$

$$\mathbf{F}_{Ks,l}^S = \mathbf{K}_s \cdot [\mathbf{C}_{SG,l}^T \cdot (\mathbf{x}_{sv,l}^G - \mathbf{x}_{sb,l}^G) - \mathbf{x}_{0,s}] + \mathbf{F}_{0,s} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{F}_{Bs,l}^S = \mathbf{B}_s \cdot [\dot{\mathbf{C}}_{SG,l}^T \cdot (\mathbf{x}_{sv,l}^G - \mathbf{x}_{sb,l}^G) + \mathbf{C}_{SG,l}^T \cdot (\dot{\mathbf{x}}_{sv,l}^G - \dot{\mathbf{x}}_{sb,l}^G)] \quad (4.14)$$

kde  $\mathbf{K}_p$ ,  $\mathbf{B}_p$ ,  $\mathbf{K}_s$  a  $\mathbf{B}_s$  jsou matice tuhosti a tlumení primárního, resp. sekundárního odpružení.  $\mathbf{F}_{0,p}$  a  $\mathbf{F}_{0,s}$  jsou rovnovážné síly v pružinách a  $\mathbf{x}_{0,p}$  a  $\mathbf{x}_{0,s}$  jsou vzájemné polohy bodů uchycení pružin, když jsou spojená tělesa v rovnovážné poloze.

Pohybové rovnice jsou sestaveny v globálním souřadném systému, tak se síly ještě převedou do něj:

$$\mathbf{F}_{Kp,k}^G = \mathbf{C}_{PG,k} \cdot \mathbf{F}_{Kp,k}^P \quad (4.15)$$

$$\mathbf{F}_{Bp,k}^G = \mathbf{C}_{PG,k} \cdot \mathbf{F}_{Bp,k}^P \quad (4.16)$$

$$\mathbf{F}_{Ks,l}^G = \mathbf{C}_{SG,l} \cdot \mathbf{F}_{Ks,l}^S \quad (4.17)$$

$$\mathbf{F}_{Bs,l}^G = \mathbf{C}_{SG,l} \cdot \mathbf{F}_{Bs,l}^S \quad (4.18)$$

Další síly, s kterými se uvažuje, jsou odpor vzduchu  $\mathbf{F}_{ov}^G$

$$\mathbf{F}_{ov}^G = -C_v \cdot |\dot{\mathbf{x}}_v^G| \cdot \dot{\mathbf{x}}_v^G \quad (4.19)$$

kde  $C_v$  je součinitel závislosti odporu vzduchu na druhé mocnině rychlosti, a  $\mathbf{t}_h$

$$\mathbf{F}_{gv}^G = m_v \cdot \mathbf{g} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{F}_{gb,i}^G = m_{b,i} \cdot \mathbf{g} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{F}_{gw,j}^G = m_{w,j} \cdot \mathbf{g} \quad (4.22)$$

kde  $\mathbf{g}$  je vektor tíhového zrychlení,  $m_v$  je hmotnost vozidla,  $m_{b,i}$  je hmotnost podvozku a  $m_{w,j}$  je hmotnost dvojkolí. Dále se určí hnací momenty dvojkolí  $\mathbf{M}_{h,j}^G$

$$\mathbf{M}_{h,j}^G = \mathbf{C}_{WG}^T \cdot f_{m,j}(\dot{\varphi}_j) \quad (4.23)$$

$f_{m,j}$  je funkce závislosti hnacího momentu na úhlové rychlosti rotace dvojkolí.

Nakonec jsou stanoveny kontaktní síly a momenty  $\mathbf{F}_{cnt,j}^G$  a  $\mathbf{M}_{cnt,j}^G$ . Podrobněji v kapitole 4.5.

Všechny získané síly jsou vloženy do pohybových rovnic. Nejprve pohybové rovnice vozidla:

$$m_v \cdot \ddot{\mathbf{x}}_v^G = \sum_l (-\mathbf{F}_{Ks,l}^G - \mathbf{F}_{Bs,l}^G) + \mathbf{F}_{ov}^G + \mathbf{F}_{gv}^G \quad (4.24)$$

$$\mathbf{J}_v \cdot \boldsymbol{\alpha}_v^G = \sum_l [(\mathbf{x}_{sv,l}^G - \mathbf{x}_v^G) \times (-\mathbf{F}_{Ks,l}^G - \mathbf{F}_{Bs,l}^G)] \quad (4.25)$$

$\mathbf{J}_v$  je matice momentů setrvačnosti vozidla,  $\boldsymbol{\alpha}_v^G$  je vektor úhlového zrychlení vozidla v globálním souřadném systému. Úpravou rovnice 4.5 a dosazením do předchozí rovnice 4.25 se získá rovnice rotací

$$\mathbf{J}_v \cdot \boldsymbol{\alpha}_v^G = \sum_l [(\mathbf{C}_{VG} \cdot \mathbf{x}_{sv,l}^G) \times (-\mathbf{F}_{Ks,l}^G - \mathbf{F}_{Bs,l}^G)] \quad (4.26)$$

#### 4.1. DYNAMIKA VOZIDLA

Obdobně se stanoví ostatní pohybové rovnice. Rovnice podvozků jsou:

$$m_{b,i} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{b,i}^G = \sum_{k \in i} (-\mathbf{F}_{Kp,k}^G - \mathbf{F}_{Bp,k}^G) + \sum_{l \in i} (\mathbf{F}_{Ks,l}^G + \mathbf{F}_{Bs,l}^G) + \mathbf{F}_{gb,i}^G \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{b,i} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{b,i}^G &= \sum_{k \in i} [(\mathbf{C}_{BG} \cdot \mathbf{x}_{pb,k}^B) \times (-\mathbf{F}_{Kp,k}^G - \mathbf{F}_{Bp,k}^G)] \\ &+ \sum_{l \in i} [(\mathbf{C}_{BG} \cdot \mathbf{x}_{sb,l}^B) \times (\mathbf{F}_{Ks,l}^G + \mathbf{F}_{Bs,l}^G)] \end{aligned} \quad (4.28)$$

$\mathbf{J}_{b,i}$  je matice momentů setrvačnosti podvozku,  $\boldsymbol{\alpha}_b^G$  je vektor úhlového zrychlení podvozku v globálním souřadném systému.

A nakonec pohybové rovnice dvojkolí:

$$m_{w,j} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{w,j}^G = \sum_{k \in j} (\mathbf{F}_{Kp,k}^G + \mathbf{F}_{Bp,k}^G) + \mathbf{F}_{cnt,j}^G + \mathbf{F}_{gw}^G \quad (4.29)$$

$$\mathbf{J}_{w,j} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{w,j}^G = \sum_{k \in j} [(\mathbf{C}_{WG} \cdot \mathbf{x}_{pw,k}^W) \times (\mathbf{F}_{Kp,k}^G + \mathbf{F}_{Bp,k}^G)] + \mathbf{M}_{cnt,j}^G + \mathbf{M}_{h,j}^G \quad (4.30)$$

$\mathbf{J}_{w,j}$  je matice momentů setrvačnosti dvojkolí,  $\boldsymbol{\alpha}_w^G$  je vektor úhlového zrychlení podvozku v globálním souřadném systému.

Pro vytvoření stavové funkce pro výpočet dalšího časového kroku zbývá určit druhé derivace šesti proměnných popisujících polohu jednotlivých těles, nejprve pro vozidlo. První tři udávají zrychlení těžiště  $\ddot{\mathbf{x}}_v^G$ , další tři jsou druhé derivace bočení  $\psi_v$ , klopení  $\theta_v$  a klonění  $\varphi_v$  a stanoví se z aktuálních hodnot těchto úhlů, jejich prvních derivací a členů vektoru úhlového zrychlení  $\boldsymbol{\alpha}_v^G$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}_v &= -\alpha_{v,1}^G \cdot \cos \psi_v \cdot \tan \theta_v - \alpha_{v,2}^G \cdot \sin \psi_v \cdot \tan \theta_v + \alpha_{v,3}^G \\ &+ \dot{\psi}_v \cdot \dot{\theta}_v \cdot \tan \theta_v - \frac{\dot{\theta}_v \cdot \dot{\varphi}_v}{\cos \theta_v} \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\ddot{\theta}_v = \alpha_{v,1}^G \cdot \sin \psi_v - \alpha_{v,2}^G \cdot \cos \psi_v + \dot{\psi}_v \cdot \dot{\varphi}_v \cdot \cos \theta_v \quad (4.32)$$

$$\ddot{\varphi}_v = \frac{\alpha_{v,1}^G \cdot \cos \psi_v}{\cos \theta_v} + \frac{\alpha_{v,2}^G \cdot \sin \psi_v}{\cos \theta_v} - \frac{\dot{\psi}_v \cdot \dot{\theta}_v}{\cos \theta_v} + \dot{\theta}_v \cdot \dot{\varphi}_v \cdot \tan \theta_v \quad (4.33)$$

Odvození viz příloha B.

Pro podvozky jsou použity obdobné rovnice. Zrychlení těžiště jsou  $\ddot{\mathbf{x}}_{b,i}^G$  a druhé derivace bočení  $\psi_{b,i}$ , klopení  $\theta_{b,i}$  a klonění  $\varphi_{b,i}$  jsou:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}_{b,i} &= -\alpha_{b,i,1}^G \cdot \cos \psi_{b,i} \cdot \tan \theta_{b,i} - \alpha_{b,i,2}^G \cdot \sin \psi_{b,i} \cdot \tan \theta_{b,i} + \alpha_{b,i,3}^G \\ &+ \dot{\psi}_{b,i} \cdot \dot{\theta}_{b,i} \cdot \tan \theta_{b,i} - \frac{\dot{\theta}_{b,i} \cdot \dot{\varphi}_{b,i}}{\cos \theta_{b,i}} \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\ddot{\theta}_{b,i} = \alpha_{b,i,1}^G \cdot \sin \psi_{b,i} - \alpha_{b,i,2}^G \cdot \cos \psi_{b,i} + \dot{\psi}_{b,i} \cdot \dot{\varphi}_{b,i} \cdot \cos \theta_{b,i} \quad (4.35)$$

$$\ddot{\varphi}_{b,i} = \frac{\alpha_{b,i,1}^G \cdot \cos \psi_{b,i}}{\cos \theta_{b,i}} + \frac{\alpha_{b,i,2}^G \cdot \sin \psi_{b,i}}{\cos \theta_{b,i}} - \frac{\dot{\psi}_{b,i} \cdot \dot{\theta}_{b,i}}{\cos \theta_{b,i}} + \dot{\theta}_{b,i} \cdot \dot{\varphi}_{b,i} \cdot \tan \theta_{b,i} \quad (4.36)$$

## 4. VÝPOČTOVÝ MODEL

A nakonec dvojkolí. Zrychlení těžiště jsou  $\ddot{\mathbf{x}}_{w,j}^G$  a druhé derivace bočení  $\psi_{w,j}$ , klopení  $\theta_{w,j}$  a klonění  $\varphi_{w,j}$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}_{b,i} = & -\alpha_{w,j,1}^G \cdot \cos \psi_{w,j} \cdot \tan \theta_{w,j} - \alpha_{w,j,2}^G \cdot \sin \psi_{w,j} \cdot \tan \theta_{w,j} + \alpha_{w,j,3}^G \\ & + \dot{\psi}_{w,j} \cdot \dot{\theta}_{w,j} \cdot \tan \theta_{w,j} - \frac{\dot{\theta}_{w,j} \cdot \dot{\varphi}_{w,j}}{\cos \theta_{w,j}} \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\ddot{\theta}_{w,j} = \alpha_{w,j,1}^G \cdot \sin \psi_{w,j} - \alpha_{w,j,2}^G \cdot \cos \psi_{w,j} + \dot{\psi}_{w,j} \cdot \dot{\varphi}_{w,j} \cdot \cos \theta_{w,j} \quad (4.38)$$

$$\ddot{\varphi}_{w,j} = \frac{\alpha_{w,j,1}^G \cdot \cos \psi_{w,j}}{\cos \theta_{w,j}} + \frac{\alpha_{w,j,2}^G \cdot \sin \psi_{w,j}}{\cos \theta_{w,j}} - \frac{\dot{\psi}_{w,j} \cdot \dot{\theta}_{w,j}}{\cos \theta_{w,j}} + \dot{\theta}_{w,j} \cdot \dot{\varphi}_{w,j} \cdot \tan \theta_{w,j} \quad (4.39)$$

## 4.2. Trať

Pro získání sil v kontaktech mezi koly a kolejnicemi je potřeba najít vzájemnou polohu vozidla, resp. dvojkolí, a trati, resp. kolejnic. Další část je tedy věnována tomu, jakým způsobem je modelována trať.

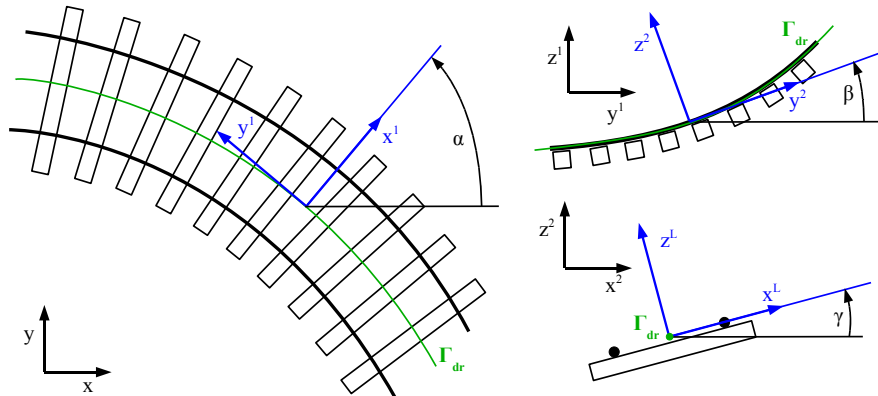
Když postupujeme z globálního souřadného systému až k detailům kontaktních ploch, je trať modelována na třech úrovních. První úroveň je trajektorie trati (zakřivení trati, stoupání, převýšení vnější kolejnice - kap. 4.2.1). Druhou úrovní je dynamika kolejového svršku (kap. 4.2.2), který na krátkém úseku v okolí vozidla simuluje průhyb kolejnic pod projíždějícími vozidly a tlumení vibrací způsobených nerovnostmi. Třetí úrovní je tvar povrchu kolejnic (kap. 4.3.1).

### 4.2.1. Trajektorie trati

Trajektorie trati je zadána její střednicí a mírou převýšení vnější kolejnice. Střednice trati je prostorová křivka, která může být zadána libovolným způsobem, ovšem pro účely výpočtu je převedena do formátu

$$\Gamma_{dr} : \mathbf{x}_{dr}(\lambda) = [x_{dr}(\lambda), y_{dr}(\lambda), z_{dr}(\lambda)]^T \quad (4.40)$$

kde  $\lambda$  je délka křivky. Tento způsob zadání je výhodný tím, že každému bodu křivky je přiřazena hodnota vzdálenosti, kterou vozidlo urazilo do daného okamžiku. Tato



Obrázek 4.3: Natočení lokálního souřadného systému.

## 4.2. TRAŤ

vzdálenost  $\lambda$  je poté využita v dalších úrovních modelu trati. Pro každý bod dráhy lze kromě polohy jeho polohy  $\mathbf{x}_{dr}$  určit i tečnu ke střednici

$$\mathbf{t}_{dr}(\lambda) = \left[ \frac{dx_{dr}}{d\lambda}, \frac{dy_{dr}}{d\lambda}, \frac{dz_{dr}}{d\lambda} \right]^T \quad (4.41)$$

Převýšení vnější kolejnice je zadáno úhlem  $\gamma_{dr}(\lambda)$ , které značí odklon uložení pražců od vodorovné roviny.

Pro další výpočet je pro každé dvojkolí vytvořen lokální souřadný systém s těmito vlastnostmi:

1. Počátek lokálního souřadného systému leží na střednici trati.
2. Tečna ke střednici dráhy je totožná s osou Y lokálního souřadného systému.
3. Osa X je rovnoběžná s pražci, osa Z je kolmá na rovinu dráhy.
4. Těžiště tělesa leží v rovině XZ, tzn. souřadnice  $y$  v lokálním souřadném systému je nulová.

K získání těchto vlastností se nejprve musí určit hodnota parametru  $\lambda_j$ . K tomu se využívá toho, že těžiště má ležet v rovině kolmé na tečnu ke střednici trati (podmínky 2 a 4). Tato podmínka je splněna, pokud vektor vzájemné polohy těžiště daného dvojkolí  $\mathbf{x}_{w,j}^G$  a bodu střednice dráhy  $\mathbf{x}_{dr}(\lambda_j)$  je kolmý na tečnu střednice.  $\lambda_j$  je pak řešením nelineární rovnice

$$\mathbf{t}_{dr}(\lambda) \cdot [\mathbf{x}^G - \mathbf{x}_{dr}(\lambda)] = 0 \quad (4.42)$$

Parametr  $\lambda_j$  slouží ke dvěma účelům. První je zadání polohy dvojkolí v submodelu dynamiky kolejového svršku, který bude představen v následující kapitole (4.2.2). Dále jím je určen lokální souřadný systém, který je použit pro stanovení kontaktních sil mezi kolejnicemi a koly. Ten je vůči globálnímu souřadnému systému posunutý o polohu bodu střednice a natočený podle tvaru dráhy (viz obr. 4.3). Natočení je udáno třemi úhly:  $\alpha_{dr}$  je natočení v půdorysu (rotace kolem osy Z),  $\beta_{dr}$  značí stoupání dráhy (rotace kolem osy X) a  $\gamma_{dr}$  odklon pražců od vodorovné roviny (rotace kolem osy Y). Dohromady tedy tvoří trojici Eulerových úhlů pro postupné rotace Z-X-Y. Matice pro transformaci souřadnic je tedy stanovena:

$$\mathbf{C}_{LG,1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{dr} & -\sin \alpha_{dr} & 0 \\ \sin \alpha_{dr} & \cos \alpha_{dr} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$\mathbf{C}_{LG,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_{dr} & -\sin \beta_{dr} \\ 0 & \sin \beta_{dr} & \cos \beta_{dr} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{C}_{LG,3} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_{dr} & 0 & -\sin \gamma_{dr} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma_{dr} & 0 & \cos \gamma_{dr} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{C}_{LG} = \mathbf{C}_{LG,1} \cdot \mathbf{C}_{LG,2} \cdot \mathbf{C}_{LG,3} \quad (4.46)$$

Úhly  $\alpha_{dr}$  a  $\beta_{dr}$  se stanoví pomocí funkce  $\text{atan2}$  (viz příloha A)

$$\alpha_{dr} = \text{atan2} \left( \frac{dy_{dr}}{d\lambda}, -\frac{dx_{dr}}{d\lambda} \right) \quad (4.47)$$

$$\beta_{dr} = \text{atan2} \left[ \sqrt{\left( \frac{dx_{dr}}{d\lambda} \right)^2 + \left( \frac{dy_{dr}}{d\lambda} \right)^2}, \frac{dz_{dr}}{d\lambda} \right] \quad (4.48)$$

Poloha těžiště dvojkolí v lokálním souřadném systému  $\mathbf{x}_{w,j}^L$  se určí

$$\mathbf{x}_{w,j}^L = \mathbf{C}_{LG}^T \cdot [\mathbf{x}_{w,j}^G - \mathbf{x}_{dr}(\lambda)] \quad (4.49)$$

Transformační matice mezi souřadným systémem dvojkolí a lokálním souřadným systémem trati je stanoven přes globální souřadný systém

$$\mathbf{C}_{WL,j} = \mathbf{C}_{LG}^T \cdot \mathbf{C}_{WG,j} \quad (4.50)$$

Nakonec se podobně upraví i matice rychlosti a úhlové rychlosti

$$\dot{\mathbf{x}}_{w,j}^L = \mathbf{C}_{LG}^T \cdot \dot{\mathbf{x}}_{w,j}^G \quad (4.51)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{WL,j} = \mathbf{C}_{LG}^T \cdot \boldsymbol{\Omega}_{WG,j} \cdot \mathbf{C}_{LG} \quad (4.52)$$

#### 4.2.2. Dynamika kolejového svršku

Za účelem modelování dynamických vlastností trati, tedy tlumení vibrací způsobených projíždějícím vozidlem, je vytvořen podrobnější model úseku trati (viz obr. 4.4). Takový model úseku trati, tedy kolejového svršku a jeho uložení, byl řešen v [1, 41].

Většinou je kolejnice modelována jako pružný nosník, který je uložen na soustavě tuhých těles složené z prachů a náhradních hmotností podloží. Použitý model je převzatý z [1], kde je kolejnice modelována jako 3D těleso metodou konečných prvků. V této práci je kolejnice modelována zjednodušeně, prutovými prvky bez uvažování vlivu smyku a gyroskopických momentů. Dále je upravena konvence os tak, aby souhlasila se zbytkem modelu, takže tah a krut nastává podle osy Y a ohyb podle os X a Z. Zakřivení kolejnic není uvažována, lze tedy říct, že poloha dvojkolí na ose Y je určena ujetou vzdáleností  $\lambda_j$  (viz kap. 4.2.1, rov. 4.42). Vektor deformací v uzlu  $\mathbf{u}_n$  a vektor sil v uzlu  $\mathbf{F}_n$  jsou definovány

$$\mathbf{u}_n = [u_x \ u_y \ u_z \ \varphi_x \ \varphi_y \ \varphi_z]^T \quad (4.53)$$

$$\mathbf{F}_n = [T_x \ N_y \ T_z \ M_{o,x} \ M_{k,y} \ M_{o,z}]^T \quad (4.54)$$

kde  $u_x$ ,  $u_y$  a  $u_z$  jsou posuvy,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  a  $\varphi_z$  jsou natočení kolem příslušných os,  $N_y$  je normálová síla v prutu,  $T_x$  a  $T_z$  jsou posouvající síly,  $M_{k,y}$  je kroutící moment a  $M_{o,x}$  a  $M_{o,z}$  jsou ohybové momenty. Výsledkem je matice tuhosti prvku

#### 4.2. TRAŤ

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_x}{L^2} & -\frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{L^2} \\ & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{12EJ_x}{L^3} & -\frac{6EJ_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EJ_x}{L^3} & -\frac{6EJ_x}{L^2} & 0 & 0 \\ & & & \frac{4EJ_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_x}{L^2} & \frac{2EJ_x}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{GJ_p}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_p}{L} & 0 \\ & & & & & \frac{4EJ_z}{L} & -\frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{L} \\ & & & & & & \frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_z}{L^2} \\ & & & & & & & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \frac{12EJ_x}{L^3} & \frac{6EJ_x}{L^2} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{4EJ_x}{L} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{GJ_p}{L} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \frac{4EJ_z}{L} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

*sym.*

a matice hmotnosti prvku

$$\mathbf{M}_e = \rho \begin{bmatrix} \frac{13AL}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11AL^2}{210} & \frac{9AL}{70} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13AL^2}{420} \\ & \frac{AL}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AL}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{13AL}{35} & \frac{11AL^2}{210} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9AL}{70} & -\frac{13AL^2}{420} & 0 & 0 \\ & & & \frac{AL^3}{105} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13AL^2}{420} & -\frac{AL^3}{140} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{LJ_p}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{LJ_p}{6} & 0 \\ & & & & & \frac{AL^3}{105} & \frac{13AL^2}{420} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho AL^3}{140} \\ & & & & & & \frac{13AL}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{11AL^2}{210} \\ & & & & & & & \frac{AL}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \frac{13AL}{35} & -\frac{11AL^2}{210} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{AL^3}{105} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{LJ_p}{3} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \frac{AL^3}{105} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

*sym.*

kde  $E$  je Youngův modul pružnosti a  $G$  modul pružnosti ve smyku materiálu kolejnice a  $\rho$  je jeho hustota.  $A$  je plocha průřezu kolejnice,  $J_z$  je kvadratický moment průřezu kolejnice vzhledem k ose X (svislý průhyb) a  $J_x$  je kvadratický moment průřezu kolejnice vzhledem k ose Z (vodorovný průhyb).  $J_p$  je polární kvadratický moment průřezu kolejnice (krut) a  $L$  je délka elementu.

V modelu je zahrnuta možnost tlumení, kdy se matice tlumení prvku  $\mathbf{B}_e$  stanoví s pomocí konstrukčního proporcionálního tlumení  $\alpha$  a materiálového proporcionálního tlumení  $\beta$

$$\mathbf{B}_e = \alpha \cdot \mathbf{M}_e + \beta \cdot \mathbf{K}_e \quad (4.57)$$

Součástí modelu je i uložení kolejnic, tedy pražce a podloží. Ty jsou zahrnuty v pěti rovnicích pro každý pražec. Rovnice pro příčnou výchylku pražce  $x_s$ :

$$m_s \ddot{x}_s + 2(b_{u,x} + b_{s,x}) \dot{x}_s + 2(k_{u,x} + k_{s,x}) x_s - b_{u,x} \dot{u}_x^L - k_{u,x} u_x^L - b_{u,x} \dot{u}_x^P - k_{u,x} u_x^P = 0 \quad (4.58)$$

Rovnice pro svislou výchylku pražce  $z_s$ :

$$m_s \ddot{z}_s + 2(b_{u,z} + b_b) \dot{z}_s + 2(k_{u,z} + k_b) z_s - b_{u,z} \dot{u}_z^L - k_{u,z} u_z^L - b_{u,z} \dot{u}_z^P - k_{u,z} u_z^P - b_b \dot{z}_{b,i}^L - k_b z_{b,i}^L - b_b \dot{z}_{b,i}^P - k_b z_{b,i}^P = 0 \quad (4.59)$$



#### 4. VÝPOČTOVÝ MODEL

Rovnice pro rotaci pražce  $\varphi_{s,y}$

$$\begin{aligned} I_{s,y} \ddot{\varphi}_{s,y} + \left[ 2b_\varphi + \frac{L_r^2}{2} (b_b + b_{u,z}) \right] \dot{\varphi}_{s,y} + \left[ 2k_\varphi + \frac{L_r^2}{2} (k_b + k_{u,z}) \right] \varphi_{s,y} \\ - b_\varphi \dot{\varphi}_y^L - k_\varphi \varphi_y^L - b_\varphi \dot{\varphi}_y^P - k_\varphi \varphi_y^P + \frac{L_r}{2} b_{u,z} \dot{u}_z^L + \frac{L_r}{2} k_{u,z} u_z^L - \frac{L_r}{2} b_{u,z} \dot{u}_z^P \\ - \frac{L_r}{2} k_{u,z} u_z^P + \frac{L_r}{2} b_b \dot{z}_{b,i}^L + \frac{L_r}{2} k_b z_{b,i}^L - \frac{L_r}{2} b_b \dot{z}_{b,i}^P - \frac{L_r}{2} k_b z_{b,i}^P = 0 \quad (4.60) \end{aligned}$$

Rovnice pro výchylku levé části podloží  $z_{b,i}^L$ :

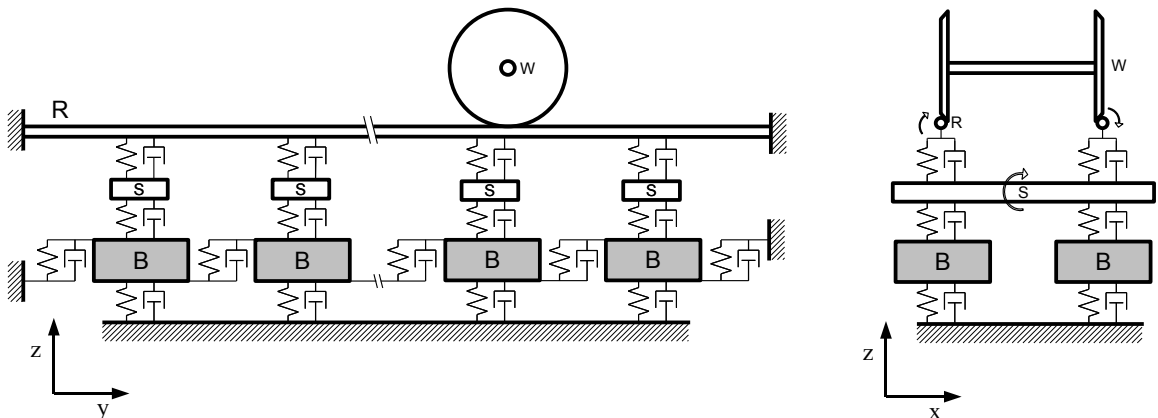
$$\begin{aligned} m_b \ddot{z}_{b,i}^L + (2b_c + b_g + b_b) \dot{z}_{b,i}^L + (2k_c + k_g + k_b) z_{b,i}^L - b_c \dot{z}_{b,i-1}^L - k_c z_{b,i-1}^L \\ - b_c \dot{z}_{b,i+1}^L - k_c z_{b,i+1}^L - b_b \dot{z}_s - k_b z_s + \frac{L_r}{2} b_b \dot{\varphi}_{s,y} + \frac{L_r}{2} k_b \varphi_{s,y} = 0 \quad (4.61) \end{aligned}$$

A nakonec rovnice pro výchylku pravé části podloží  $z_{b,i}^P$ :

$$\begin{aligned} m_b \ddot{z}_{b,i}^L + (2b_c + b_g + b_b) \dot{z}_{b,i}^L + (2k_c + k_g + k_b) z_{b,i}^L - b_c \dot{z}_{b,i-1}^L - k_c z_{b,i-1}^L \\ - b_c \dot{z}_{b,i+1}^L - k_c z_{b,i+1}^L - b_b \dot{z}_s - k_b z_s - \frac{L_r}{2} b_b \dot{\varphi}_{s,y} - \frac{L_r}{2} k_b \varphi_{s,y} = 0 \quad (4.62) \end{aligned}$$

Symbolsy v těchto rovnicích značí:  $m_s$  je hmotnost pražce,  $I_{s,y}$  je moment setrvačnosti pražce,  $m_b$  je hmotnost náhradní hmoty podloží,  $k_{u,x}$  a  $b_{u,x}$  je tuhost a tlumení uchycení kolejnice v příčném směru,  $k_{u,z}$  a  $b_{u,z}$  je tuhost a tlumení uchycení kolejnice ve svislém směru,  $k_\varphi$  a  $b_\varphi$  je tuhost a tlumení uchycení kolejnice pro krut kolejnice,  $k_{s,x}$  a  $b_{s,x}$  je tuhost a tlumení uložení pražce v příčném směru,  $k_b$  a  $b_b$  je tuhost a tlumení vazby mezi pražcem a podložím,  $k_g$  a  $b_g$  je tuhost a tlumení vazby mezi podložím a základním tělesem,  $k_c$  a  $b_c$  je tuhost a tlumení vazby mezi dvěma náhradními hmotami podloží v podélném směru,  $L_r$  je rozchod kolejnic a  $u_x^{L/R}$ ,  $u_z^{L/R}$  a  $\varphi_y^{L/R}$  jsou výchylky příslušné kolejnice v uzlu, ve kterém je přichycena k danému pražci.

Každou kolejnici pak tvoří  $N_{us}$  úseků mezi pražci, které jsou dále rozděleny na  $N_{emp}$  elementů. Tyto hodnoty jsou volitelné uživatelem a algoritmus vhodně sestaví globální matice tuhosti a hmotnosti podle zadaných vlastností sítě. Globální matice pak obsahují jak prvky, které odpovídají elementům kolejnice, tak jsou do nich zahrnuty rovnice uložení. Co se týká zatížení, pak je uvažováno, že síly a momenty působí pouze na kolejnici, a to v obecné poloze, a jsou rozpočítány do nejbližších uzlů v poměru podle polohy na daném prvku.



Obrázek 4.4: Schéma modelu dynamiky kolejového svršku.

#### 4.3. TVAR POVRCHŮ V KONTAKTU

### 4.3. Tvar povrchů v kontaktu

Cílem práce jsou síly v kontaktu kola a kolejnice, přičemž se uvažuje, že tvar kola a kolejnice je obecný, tzn. uvažují se i nerovnosti. Proto je na tvar povrchů v kontaktu kladen největší důraz. Aby obecný tvar byl postihnout, je nutné znát přesný tvar kol a kolejnic a při okamžité poloze a rychlosti dvojkolí určit vzdálenost mezi povrchy a jejich relativní rychlost, resp. skluzu, které slouží jako vstupy pro stanovení normálových a tečných sil.

#### 4.3.1. Tvar kolejnice

Tvar kolejnice je určen funkcí jejího profilu  $N$ . Tu je možné rozložit do dvou složek, ideálního profilu  $N_{id}$ , který je standardizovaný (např. profil kolejnice UIC60), a nerovností  $N_{ner}$ :

$$N(x_r, y_r) = N_{id}(x_r) + N_{ner}(x_r, y_r + \lambda) \quad (4.63)$$

Zde  $x_r$  je příčná poloha v průřezu kolejnice vzhledem k těžišti kolejnice,  $y_r$  je podélná poloha na kolejnici v lokálním souřadném systému.  $\lambda$  je použita proto, aby bylo možné vyjádřit nerovnosti po celé délce kolejnice.

Funkce nerovností  $N_{ner}$  může být aproximována z naměřených dat pomocí splajnu nebo Fourierovy řady. Vliv deformace kolejnice v místě kontaktu zjištěný pomocí modelu v kap. 4.2.2 a vliv uložení kolejnice jsou započítány až při zpracování funkce vzdálenosti mezi povrchy.

#### 4.3.2. Tvar kola

Tvar kola je zadán v cylindrických souřadnicích pomocí poloměru kola  $R$ . Cylindrické souřadnice použité v tomto případně jsou definovány: polární souřadnice  $\rho_d$  a  $\alpha_d$  určují polohu v rovině YZ a zbývající osa je osa dvojkolí, tedy  $x_d$ . Poloha bodu kola v Kartézském souřadném systému svázaným s dvojkolím je

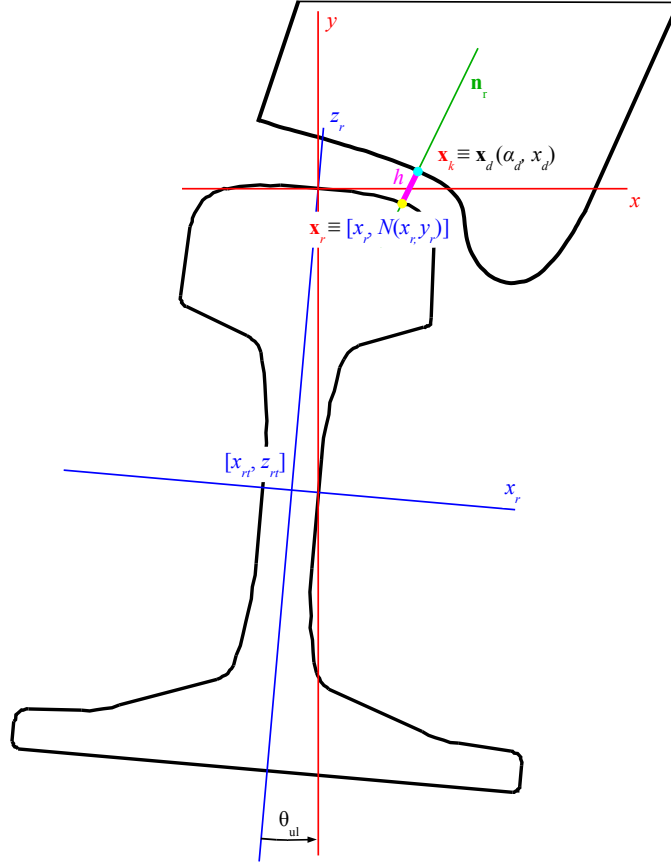
$$\mathbf{x}_d = \begin{bmatrix} x_d & R(\alpha_d, x_d) \cdot \cos \alpha_d & R(\alpha_d, x_d) \cdot \sin \alpha_d \end{bmatrix}^T \quad (4.64)$$

Funkci poloměru lze opět rozložit na standardizovaný profil zadaný funkcí  $R_{id}$  (např. profil železničního kola S1002) a na odchylky od ideálního tvaru, zastoupené ve funkci  $R_{ner}$ :

$$R(\alpha_d, x_d) = R_{id}(x_d) + R_{ner}(\alpha_d, x_d) \quad (4.65)$$

#### 4.3.3. Vzdálenost mezi povrchy v kontaktu

Pro určení vzdálenosti mezi povrchy je kromě vlastních funkcí nutné znát i aktuální polohu dvojkolí a deformaci kolejnice. Síly v kontaktu se určují v lokálním souřadném systému, takže do tohoto algoritmu vstupují poloha dvojkolí v lokálním souřadném systému stanovené v kap. 4.2.1 - poloha těžiště v rov. 4.49, matice natočení v rov. 4.50. Pro výpočet kontaktních sil jsou důležité čtyři hodnoty deformace každé kolejnice: posunutí v tahu  $u_y$ , průhyby kolejnice  $u_x$  a  $u_z$  a zkroucení kolejnice  $\varphi_y$ . Protože velikost kontaktní plochy má pouze několik centimetrů a dosah deformace kolejnice má několik metrů, bere se v potaz pouze hodnota, která odpovídá parametru  $\lambda$  (rov. 4.42) daného dvojkolí. Hodnota deformace na daném místě se pak stanoví interpolací polynomem



Obrázek 4.5: Vzdálenost povrchů kola a kolejniče

4. řádu, kterým jsou proloženy hodnoty v nejbližších pěti uzlech kolejniče. Posledním činitelem ovlivňujícím vzdálenost mezi povrchy kola a kolejniče je úhel uložení kolejniče  $\theta_{ul}$ . Při zohlednění všech těchto informací je pro stejné vstupy  $x_r$  a  $y_r$  jako v rov. 4.63 skutečná poloha bodu kolejniče

$$\mathbf{x}_r = \begin{bmatrix} x_r \cdot \cos(\theta_{ul} + \varphi_y) - N(x_r, y_r) \cdot \sin(\theta_{ul} + \varphi_y) + u_x + x_{rt} \\ y_r + u_y \\ x_r \cdot \sin(\theta_{ul} + \varphi_y) + N(x_r, y_r) \cdot \cos(\theta_{ul} + \varphi_y) + u_z + z_{rt} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Zde  $x_{rt}$  a  $z_{rt}$  jsou souřadnice polohy těžiště průřezu nezatížené kolejniče. Pro nalezení vzdálenosti tohoto bodu od povrchu kola je nutné znát i normálu k povrchu kolejniče v tomto bodě  $\mathbf{n}_r$ . Ta se určí pomocí dvou tečných vektorů  $\mathbf{t}_{r1}$  a  $\mathbf{t}_{r2}$

$$\mathbf{t}_{r1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{ul} + \varphi_y) - \frac{\partial N}{\partial x_r} \cdot \sin(\theta_{ul} + \varphi_y) \\ 0 \\ \sin(\theta_{ul} + \varphi_y) + \frac{\partial N}{\partial x_r} \cdot \cos(\theta_{ul} + \varphi_y) \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$\mathbf{t}_{r2} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial N}{\partial y_r} \cdot \sin(\theta_{ul} + \varphi_y) \\ 1 \\ \frac{\partial N}{\partial y_r} \cdot \cos(\theta_{ul} + \varphi_y) \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

$$\mathbf{n}_r = \frac{\mathbf{t}_{r1} \times \mathbf{t}_{r2}}{|\mathbf{t}_{r1} \times \mathbf{t}_{r2}|} \quad (4.69)$$

#### 4.4. PŘÍPRAVA VSTUPŮ DO ALGORITMŮ VÝPOČTU KONTAKTNÍCH SIL

Pomocí této normály je hledána vzdálenost mezi oběma povrchy  $h$  (viz obr. 4.5). Bod normály je dán vzdáleností od povrchu kolejnice:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_r + h \cdot \mathbf{n}_r \quad (4.70)$$

Pokud je bod povrchu kola  $\mathbf{x}_k$  průsečíkem normály, pak je vzdálenost tohoto bodu a vhodného bodu normály nulová:

$$|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_n| = 0 \quad (4.71)$$

V případě obecného tvaru kola nelze průsečík  $\mathbf{x}_k$  stanovit explicitně, proto je hledán vždy bod povrchu kola, který leží přímo nad bodem normály. Tento bod, určený souřadnicemi  $\alpha_d$  a  $x_d$  (rov. 4.65), je nalezen numericky. Poloha bodu kola v souřadném systému svázaném s dvojkolím je stanovena v rovnici 4.64:

$$\mathbf{x}_d = \begin{bmatrix} x_d & R(\alpha_d, x_d) \cdot \cos \alpha_d & R(\alpha_d, x_d) \cdot \sin \alpha_d \end{bmatrix}^T$$

a ta je poté transformována do lokálního souřadného systému:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{C}_{WL} \cdot \mathbf{x}_d + \mathbf{x}_{w,j}^L \quad (4.72)$$

Zajímají nás pouze první dvě souřadnice bodu, a tak získáme dvě nelineární rovnice

$$x_k(\alpha_d, x_d) - x_n = 0 \quad (4.73)$$

$$y_k(\alpha_d, x_d) - y_n = 0 \quad (4.74)$$

v kterých lze Newtonovou metodou stanovit neznámé  $\alpha_d$  a  $x_d$ . Jakobián soustavy je matice složená vždy z prvních dvou složek tečných vektorů povrchu kola

$$\mathbf{t}_{k1} = \mathbf{C}_{WL} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{dR}{d\alpha_d} \cdot \cos \alpha_d - R \cdot \sin \alpha_d \\ \frac{dR}{dx_d} \cdot \sin \alpha_d + R \cdot \cos \alpha_d \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

$$\mathbf{t}_{k2} = \mathbf{C}_{WL} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{dR}{d\alpha_d} \cdot \cos \alpha_d \\ \frac{dR}{dx_d} \cdot \sin \alpha_d \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

Při splnění rovností 4.73 a 4.74 je vzdálenost bodu kolejnice a bodu normály

$$|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_n| = z_k - z_n \quad (4.77)$$

Vzdálenost mezi povrchy  $h$  je poté nalezena numericky, tentokrát metodou sečen, přičemž v každém kroku se obměňují bod normály  $\mathbf{x}_n$  a bod kola  $\mathbf{x}_k$ , dokud není splněna podmínka 4.71.

#### 4.4. Příprava vstupů do algoritmů výpočtu kontaktních sil

Vzdálenost mezi povrchy není jediný údaj, který je potřebný pro stanovení sil v kontaktu, zvláště v analytických metodách. Proto musí být vypočítány další vstupy. Těm jsou věnovány následující části.

#### 4.4.1. Příprava Hertzova řešení

V Hertzově řešení má kontaktní plocha tvar elipsy, jejíž střed leží v minimu funkce vzdálenosti povrchů

$$h = \min [h(x_r, y_r)] \quad (4.78)$$

Vstupy do algoritmu Hertzova řešení jsou kromě této vzdálenosti i hlavní poloměry (resp. křivosti) povrchů v kontaktu (viz rov. 3.4). Algoritmus stanovení hlavních křivostí a hlavního souřadného systému plochy lze najít v [7]. Hlavní křivosti a hlavní tečné vektory plochy se pak získají řešením vlastního problému

$$(\mathbf{H} \cdot \mathbf{G}^{-1}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{u} \quad (4.79)$$

kde  $\mathbf{G}$  je první základní forma plochy,  $\mathbf{H}$  je druhá základní forma plochy,  $\mathbf{C}$  je diagonální matice hlavních křivostí plochy a  $\mathbf{u}$  je vektor parametrů, které po zpracování dají hlavní tečné vektory plochy.

První základní forma plochy kolejnice je

$$\mathbf{G}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{r1} \cdot \mathbf{t}_{r1} & \mathbf{t}_{r1} \cdot \mathbf{t}_{r2} \\ \mathbf{t}_{r2} \cdot \mathbf{t}_{r1} & \mathbf{t}_{r2} \cdot \mathbf{t}_{r2} \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

kde  $\mathbf{t}_{r1}$  a  $\mathbf{t}_{r2}$  jsou tečné vektory povrchu kolejnice stanovené v rov. 4.66 a 4.67. Druhá základní forma plochy kolejnice je

$$\mathbf{H}_r = \frac{1}{|\mathbf{t}_{r1} \times \mathbf{t}_{r2}|} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

Matice hlavních křivostí povrchu kolejnice  $\mathbf{C}_r$  je řešením vlastního problému

$$(\mathbf{H}_r \cdot \mathbf{G}_r^{-1}) \cdot \mathbf{u}_r = \mathbf{C}_r \cdot \mathbf{u}_r \quad (4.82)$$

a hlavní souřadný systém plochy kolejnice je dán hlavními tečnými vektory

$$\mathbf{t}_{hr1} = u_{r1,1} \cdot \mathbf{t}_{r1} + u_{r1,2} \cdot \mathbf{t}_{r2} \quad (4.83)$$

$$\mathbf{t}_{hr2} = u_{r2,1} \cdot \mathbf{t}_{r1} + u_{r2,2} \cdot \mathbf{t}_{r2} \quad (4.84)$$

kde  $\mathbf{u}_{r1}$  a  $\mathbf{u}_{r2}$  jsou vlastní vektory.

S normálovým vektorem  $\mathbf{n}_r$  určeným v rov. 4.69. tvoří vektory  $\mathbf{t}_{hr1}$  a  $\mathbf{t}_{hr2}$  matice hlavního souřadného systému kolejnice

$$\mathbf{H}_{ss,r} = [\mathbf{t}_{hr1} \quad \mathbf{t}_{hr2} \quad \mathbf{n}_r] \quad (4.85)$$

Bod povrchu kola je dán parametry  $\alpha_d$  a  $x_d$ , které jsou stanoveny v průběhu zjišťování vzdálenosti povrchů. První základní forma povrchu kola je složena opět ze skalárních součinů tečných vektorů kola, ovšem na rozdíl od rov. 4.75 a 4.76 netransformovaných do lokálního souřadného systému:

$$\mathbf{t}_{d1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{dR}{d\alpha_d} \cdot \cos \alpha_d - R \cdot \sin \alpha_d \\ \frac{dR}{d\alpha_d} \cdot \sin \alpha_d + R \cdot \cos \alpha_d \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

$$\mathbf{t}_{d2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{dx_d}{d\alpha_d} \cdot \cos \alpha_d \\ \frac{dx_d}{d\alpha_d} \cdot \sin \alpha_d \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{d1} \cdot \mathbf{t}_{d1} & \mathbf{t}_{d1} \cdot \mathbf{t}_{d2} \\ \mathbf{t}_{d2} \cdot \mathbf{t}_{d1} & \mathbf{t}_{d2} \cdot \mathbf{t}_{d2} \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

#### 4.4. PŘÍPRAVA VSTUPŮ DO ALGORITMŮ VÝPOČTU KONTAKTNÍCH SIL

Druhá základní forma plochy

$$\mathbf{H}_k = \frac{1}{|\mathbf{t}_{d1} \times \mathbf{t}_{d2}|} \cdot \begin{bmatrix} R \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial \alpha_d^2} - 2 \cdot \left( \frac{\partial R}{\partial \alpha_d} \right)^2 - R^2 & R \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial \alpha_d \partial x_d} - \frac{\partial R}{\partial \alpha_d} \cdot \frac{\partial R}{\partial x_d} \\ R \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial \alpha_d \partial x_d} - \frac{\partial R}{\partial \alpha_d} \cdot \frac{\partial R}{\partial x_d} & R \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial x_d^2} \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Matice hlavních křivostí povrchu kola  $\mathbf{C}_k$  je opět řešením vlastního problému

$$(\mathbf{H}_k \cdot \mathbf{G}_k^{-1}) \cdot \mathbf{u}_k = \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{u}_k \quad (4.90)$$

Hlavní souřadný systém plochy kola už je transformován do lokálního souřadného systému

$$\mathbf{t}_{hk1} = \mathbf{C}_{WL} \cdot (u_{k1,1} \cdot \mathbf{t}_{d1} + u_{k1,2} \cdot \mathbf{t}_{d2}) \quad (4.91)$$

$$\mathbf{t}_{hk2} = \mathbf{C}_{WL} \cdot (u_{k2,1} \cdot \mathbf{t}_{d1} + u_{k2,2} \cdot \mathbf{t}_{d2}) \quad (4.92)$$

$$\mathbf{n}_k = \frac{\mathbf{t}_{hk1} \times \mathbf{t}_{hk2}}{|\mathbf{t}_{hk1} \times \mathbf{t}_{hk2}|} \quad (4.93)$$

kde  $\mathbf{u}_{k1}$  a  $\mathbf{u}_{k2}$  jsou vlastní vektory tohoto vlastního problému. Výsledná transformační matice je

$$\mathbf{H}_{ss,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{hk1} & \mathbf{t}_{hk2} & \mathbf{n}_k \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Jako kontrola může být použito, že normálové vektory obou ploch v bodě minima vzdálenosti jsou stejné, tedy

$$\mathbf{n}_k = \mathbf{n}_r \quad (4.95)$$

Oba hlavní souřadné systémy vůči sobě mohou být natočeny kolem normály o úhel  $\omega$ . Proto je podle [33, str. 29-31] stanoven společný hlavní souřadný systém  $\mathbf{H}_{ss}$ , který je vůči hlavnímu souřadnému systému povrchu kola natočen o úhel  $\omega_k$  a vůči hlavnímu souřadnému systému kolejnice o úhel  $\omega_r$ :

$$\omega_k = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left[ \frac{\sin(2 \cdot \omega)}{\cos(2 \cdot \omega) - \frac{C_{k,11} - C_{k,22}}{C_{r,11} - C_{r,22}}} \right] \quad (4.96)$$

$$\omega_r = \omega - \omega_k \quad (4.97)$$

Jsou vytvořeny transformační rovnice pro otočení do společného hlavního souřadného systému

$$\mathbf{T}_k = \begin{bmatrix} \cos \omega_k & -\sin \omega_k & 0 \\ \sin \omega_k & \cos \omega_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

$$\mathbf{T}_{k,2D} = \begin{bmatrix} \cos \omega_k & -\sin \omega_k \\ \sin \omega_k & \cos \omega_k \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

$$\mathbf{T}_{r,2D} = \begin{bmatrix} \cos \omega_r & -\sin \omega_r \\ \sin \omega_r & \cos \omega_r \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

Společný hlavní souřadný systém kontaktní plochy je

$$\mathbf{H}_{ss} = \mathbf{H}_{ss,k} \cdot \mathbf{T}_k \quad (4.101)$$

Společné hlavní křivosti jsou

$$\mathbf{C}_s = \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{T}_{k,2D} \cdot \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{T}_{k,2D}^T - \mathbf{T}_{r,2D} \cdot \mathbf{C}_r \cdot \mathbf{T}_{r,2D}^T| \quad (4.102)$$

Křivosti použité v rov. 3.4 potom jsou  $A = C_{s,11}$  a  $B = C_{s,22}$ .

Nyní jsou všechny potřebné vstupy pro Hertzovo řešení stanoveny: působí síla je v minimu vzdálenosti povrchů  $h$  (rov. 4.78), tomu přísluší bod  $\mathbf{x}_r$  (rov. 4.66), směr síly je totožný s normálou k povrchu  $\mathbf{n}_r$  (rov. 4.69), a nakonec hlavní křivosti kontaktu jsou v matici  $\mathbf{C}_s$  (rov. 4.102).

#### 4.4.2. Relativní skluzu

Tečné silové působení v kontaktu je závislé na skluzech, tzn. na vzájemném pohybu těles v kontaktu. Jak bylo zmíněno v kap. 3.3, jsou tyto skluzu tři: podélný skluz  $v_x$ , příčný skluz  $v_y$  a spinový skluz  $\varphi_z$ . Tato kapitola se věnuje jejich vyjádření.

Prvním potřebným parametrem je rychlost valení  $V$ . Ta je v teoriích valivého kontaktu stanovena jako posuvná rychlost odvalujícího se tělesa. Je to tedy rychlost dvojkolí  $\dot{\mathbf{x}}_{w,j}^L$  stanovena v rov. 4.51. V těchto teoriích je ovšem osa  $x$  totožná s rychlostí valení. Je proto potřeba zjistit směr rychlosti valení a veškeré potřebné parametry (skluzu, tvar kontaktní elipsy) transformovat tak, aby to odpovídalo. Rychlost valení  $V$  je velikostí průmětu rychlosti dvojkolí do roviny kontaktu  $\mathbf{v}_{val}$ :

$$\mathbf{v}_{val} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{H}_{ss}^T \cdot \dot{\mathbf{x}}_{w,j}^L \quad (4.103)$$

$$V = |\mathbf{v}_{val}| \quad (4.104)$$

Směr valení je pak dán úhlem  $\varepsilon_{val}$ :

$$\varepsilon_{val} = \text{atan2}(v_{val,1}, v_{val,2}) \quad (4.105)$$

Tímto úhlem je definována další transformace, tentokrát natočení do souřadného systému svázaného s rychlostí valení:

$$\mathbf{T}_{val} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_{val} & -\sin \varepsilon_{val} & 0 \\ \sin \varepsilon_{val} & \cos \varepsilon_{val} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

Rychlost kmitání kolejnice se uvažuje jako nepodstatná vzhledem k pohybu kola, proto relativní rychlost v kontaktu  $\mathbf{v}_{rel}$  je rychlost daného bodu kola, po transformaci:

$$\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{T}_{val}^T \cdot \mathbf{H}_{ss}^T \cdot \boldsymbol{\Omega}_{WL,j} \cdot \mathbf{C}_{WL,j} \cdot \mathbf{x}_d + \dot{\mathbf{x}}_{w,j}^L \quad (4.107)$$

$\boldsymbol{\Omega}_{WL,j}$  je matice úhlové rychlosti otáčení dvojkolí (rov. 4.52). Ta je také transformovaná do hlavního souřadného systému kontaktu:

$$\boldsymbol{\omega}_{kon} = \mathbf{H}_{ss}^T \cdot \boldsymbol{\omega}_{WL,j} \quad (4.108)$$

#### 4.5. PŘEPOČET SILOVÉHO PŮSOBENÍ

kde  $\omega_{WL,j}$  je vektorová forma asymetrické matice  $\Omega_{WL,j}$ .  
Poté už lze snadno stanovit jednotlivé skluzy:

$$v_x = \frac{v_{rel,1}}{V} \quad (4.109)$$

$$v_y = \frac{v_{rel,2}}{V} \quad (4.110)$$

$$\varphi_z = \frac{\omega_{WL,j,3}}{V} \quad (4.111)$$

Tyto skluzy pak slouží jako vstupy pro stanovení tečných sil metodami, které jsou založeny na Hertzově řešení: Kalkerova lineární teorie (kap. 3.3.1), model podle Shena, Hedricka a Elkinse (kap. 3.3.2), Poláchův model (kap. 3.3.3) a algoritmus FASTSIM (kap. 3.3.4).

##### 4.4.3. Příprava algoritmu CONTACT

Na rozdíl od metod, které vycházejí z Hertzova řešení, algoritmus CONTACT (kap. 3.1.2 a 3.3.5) pracuje se skutečným tvarem kontaktních povrchů. Předpokládaná oblast kontaktu je nahrazena sítí a každý prvek této sítě je zastoupen svým středem, pro který stanovena jeho skutečná poloha (stejně jako v rov. 4.66), normála (rov. 4.69) a vzdálenost obou povrchů  $h$  (viz kap. 4.3.3). Každému elementu je přiřazen jeho vlastní souřadný systém  $\mathbf{E}_{ss}$ , jehož osa  $z$  je totožná s normálou k povrchu kolejnice.

Skluzové rychlosti  $c_{I\tau}$  každého prvku jsou průměty rychlosti kola v jeho středu do tečných směrů ESS:

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \Omega_{WL,j} \cdot \mathbf{C}_{WL,j} \cdot \mathbf{x}_d + \dot{\mathbf{x}}_{w,j}^L \quad (4.112)$$

$$c_{I\tau} = \dot{\mathbf{x}}_k \cdot \mathbf{E}_{ss,\tau} \quad (4.113)$$

kde  $\mathbf{E}_{ss,\tau}$  je  $\tau$ -tá osa souřadného systému  $\mathbf{E}_{ss}$ . Omezením algoritmu CONTACT je, že při měnící se rychlosti valení je nutné přepočítat celou matici vlivu předchozího kroku (viz 3.3.5).

#### 4.5. Přepočet silového působení

Vyřešené síly v kontaktu je třeba transformovat do správných souřadných systémů, aby mohly být použity buď v pohybových rovnicích vozidla nebo jako síly v příslušných uzlech modelu dráhy (viz kap. 4.2.2).

Výstupy metod založených na Hertzově řešení jsou normálová síla  $N$ , tečné síly  $T_x$ ,  $T_y$  a spinový moment  $M_z$ . Jejich působíště a směry jsou stanoveny během přípravy vstupů do algoritmů (viz kap. 4.3.3, 4.4.1 a 4.4.2). Síla a moment v kontaktu každého kola v souřadném systému vztaheném k rychlosti valení je

$$\mathbf{F}_{kon} = [T_x \ T_y \ N]^T \quad (4.114)$$

$$\mathbf{M}_{kon} = [0 \ 0 \ M_z]^T \quad (4.115)$$

Po transformaci do souřadného systému svázaného s dvojkolím:

$$\mathbf{F}_{kon}^W = \mathbf{C}_{WL}^T \cdot \mathbf{H}_{ss} \cdot \mathbf{T}_{val} \cdot \mathbf{F}_{kon} \quad (4.116)$$

$$\mathbf{M}_{kon}^W = \mathbf{C}_{WL}^T \cdot [\mathbf{H}_{ss} \cdot \mathbf{M}_{kon} + (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_{w,j}^L) \times (\mathbf{H}_{ss} \cdot \mathbf{T}_{val} \cdot \mathbf{F}_{kon})] \quad (4.117)$$



#### 4. VÝPOČTOVÝ MODEL

Celkový vliv sil v kontaktu na dvojkolí pak je součtem působení na levé a pravé kolo:

$$\mathbf{F}_{cnt,j}^W = \mathbf{F}_{kon,L}^W + \mathbf{F}_{kon,P}^W \quad (4.118)$$

$$\mathbf{M}_{cnt,j}^W = \mathbf{M}_{kon,L}^W + \mathbf{M}_{kon,P}^W \quad (4.119)$$

Silové působení na kolejnice se určuje v lokálním souřadném systému, zároveň platí zákon akce a reakce. Proto má síla opačný smysl než síla na kolo a poslední transformace z lokálního souřadného systému do souřadného systému dvojkolí není zahrnuta. Moment, kterým kolo působí na kolejnici, je moment vzhledem k těžišti průřezu kolejnice:

$$\mathbf{F}_r = -\mathbf{H}_{ss} \cdot \mathbf{T}_{val} \cdot \mathbf{F}_{kon} \quad (4.120)$$

$$\mathbf{M}_r = -\left[ \mathbf{H}_{ss} \cdot \mathbf{M}_{kon} + \left( \mathbf{x}_r - \begin{bmatrix} x_{rt} \\ 0 \\ z_{rt} \end{bmatrix} \right) \times (\mathbf{H}_{ss} \cdot \mathbf{T}_{val} \cdot \mathbf{F}_{kon}) \right] \quad (4.121)$$

Tato síla a moment je stanovena zvlášť pro každé kolo. Polohu působíště na nosníku kolejnice určuje parametr  $\lambda$  (rov. 4.42). Pokud není totožné s některým uzlem, je zatížení rozděleno do dvou nejbližších uzlů.

Výstup z algoritmu CONTACT je odlišný. Pro každý element je stanoveno normálové a tečné zatížení a celková síla a moment v kontaktu je stanovena jako suma přes všechny elementy

$$\mathbf{F}_{kon,C}^W = \mathbf{C}_{WL}^T \cdot \sum_I^N \mathbf{E}_{ss,I} \cdot \mathbf{p}_I \cdot S_I \quad (4.122)$$

$$\mathbf{M}_{kon,C}^W = \mathbf{C}_{WL}^T \cdot \sum_I^N (\mathbf{x}_{r,I} - \mathbf{x}_{w,j}^L) \times (\mathbf{E}_{ss,I} \cdot \mathbf{p}_I \cdot S_I) \quad (4.123)$$

kde  $\mathbf{E}_{ss,I}$  je souřadný systém daného elementu,  $\mathbf{p}_I$  je zatížení v daném elementu,  $S_I$  je plocha daného elementu,  $\mathbf{x}_{r,I}$  je poloha středu daného elementu v lokálním souřadném systému. Síla a moment působící na dvojkolí je opět součtem působení na levé a pravé kolo.

Působení na kolejnice se stanoví obdobně:

$$\mathbf{F}_{r,C} = -\sum_I^N \mathbf{E}_{ss,I} \cdot \mathbf{p}_I \cdot S_I \quad (4.124)$$

$$\mathbf{M}_{r,C} = -\sum_I^N \left( \mathbf{x}_{r,I} - \begin{bmatrix} x_{rt} \\ 0 \\ z_{rt} \end{bmatrix} \right) \times (\mathbf{E}_{ss,I} \cdot \mathbf{p}_I \cdot S_I) \quad (4.125)$$

### 4.6. Implementace pohybových rovnic a integrace

Celý model je implementován ve formě funkcí v programovacím jazyku prostředí MATLAB. Všem dílčím modelům jsou věnovány zvláštní funkce a komunikace mezi nimi je zajištěna předáváním odpovídajících si vstupů a výstupů.

Z důvodu náročnosti výpočtu jednoho kroku a obtížného stanovení mezikroků, nejsou

#### 4.7. PARAMETRY POUŽITÉHO VÝPOČTOVÉHO MODELU

použity jednokrokové metody (Newmarkova, Runge-Kutta). Pro integraci pohybu vozidla tak jsou použity explicitní vícekrokové metody Adams-Bashforth [67]:

$$1.\text{krok} : \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + dt \cdot \dot{\mathbf{y}}_n \quad (4.126)$$

$$2.\text{krok} : \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + dt \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot \dot{\mathbf{y}}_n - \frac{1}{2} \cdot \dot{\mathbf{y}}_{n-1} \right) \quad (4.127)$$

$$3.\text{krok} : \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + dt \cdot \left( \frac{23}{12} \cdot \dot{\mathbf{y}}_n - \frac{4}{3} \cdot \dot{\mathbf{y}}_{n-1} + \frac{5}{12} \cdot \dot{\mathbf{y}}_{n-2} \right) \quad (4.128)$$

$$\text{dále} : \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + dt \cdot \left( \frac{55}{24} \cdot \dot{\mathbf{y}}_n - \frac{59}{24} \cdot \dot{\mathbf{y}}_{n-1} + \frac{37}{24} \cdot \dot{\mathbf{y}}_{n-2} - \frac{3}{8} \cdot \dot{\mathbf{y}}_{n-3} \right) \quad (4.129)$$

kde  $dt$  je časový krok,  $\mathbf{y}$  je stavový vektor a  $\dot{\mathbf{y}}$  jeho derivace určená stavovou funkcí

$$\dot{\mathbf{y}} = f_{st}(\mathbf{y}, t) \quad (4.130)$$

V případě integrace dynamiky kolejového svršku však není vhodné použít explicitní metody. Časový krok, při kterém je tento model stabilní, se pohybuje kolem  $10^{-6}$  s, což je příliš malý čas. Proto je pro integraci dráhy použita implicitní Eulerova metoda:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + dt \cdot f_{st}(\mathbf{y}_{n+1}, t_{n+1}) \quad (4.131)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}}{dt} \quad (4.132)$$

Soustava diferenciálních rovnic pohybu dráhy

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{Q} \quad (4.133)$$

je převedena na soustavu lineárních rovnic řešení nového kroku:

$$\mathbf{K}_{dyn} = \frac{1}{dt^2} \cdot \mathbf{M} + \frac{1}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{K} \quad (4.134)$$

$$\mathbf{B}_{dyn} = \frac{2}{dt^2} \cdot \mathbf{M} + \frac{1}{dt} \cdot \mathbf{B} \quad (4.135)$$

$$\mathbf{M}_{dyn} = -\frac{1}{dt^2} \cdot \mathbf{M} \quad (4.136)$$

$$\mathbf{Q}_{dyn} = \mathbf{Q} + \mathbf{B}_{dyn} \cdot \mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{M}_{dyn} \cdot \mathbf{u}_{n-2} \quad (4.137)$$

$$\mathbf{K}_{dyn} \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{Q}_{dyn} \quad (4.138)$$

Takto už je možné použít mnohem větší integrační krok.

### 4.7. Parametry použitého výpočtového modelu

Pro výpočty byly jednotlivé parametry dosazeny na základě údajů získaných z dostupných zdrojů. Vektory souřadnic každého tělesa jsou zadány ve formátu

$$\mathbf{x} = [x \ y \ z \ \psi \ \theta \ \varphi]^T \quad (4.139)$$

Posuvy jsou zadány v metrech, natočení ve stupních nebo radiánech (vždy specifikováno).

### 4.7.1. Vozidlo

Modelové vozidlo má charakteristiky, které přibližně odpovídají vlastnostem lokomotiv řady 363 (fotografie viz obr. 4.6, rozměry viz obr. 4.7).

#### Těleso vozidla

Hmotnost

$$m_v = 70000 \text{ kg} \quad (4.140)$$

Matice momentů setrvačnosti

$$\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} 1.7 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 7.2 \cdot 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (4.141)$$

Počáteční poloha těžiště

$$\mathbf{x}_v = [0 \ 10 \ 2.5 \ 0 \ 0 \ 0]^T \text{ m, rad} \quad (4.142)$$

Počáteční rychlost těžiště

$$\dot{\mathbf{x}}_v = [0 \ v_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.143)$$

#### Podvozky

Hmotnost

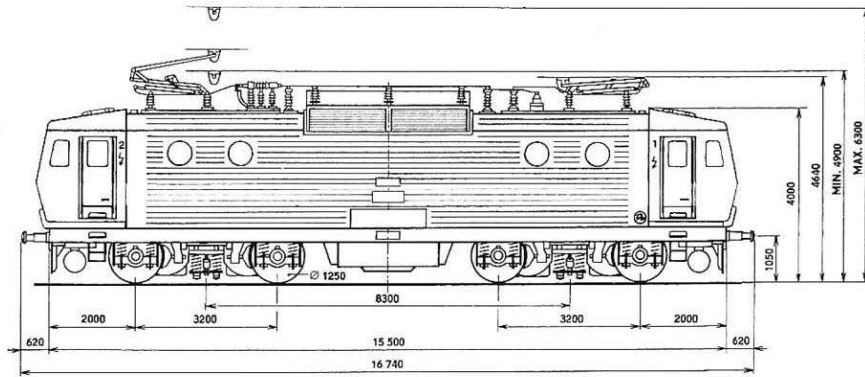
$$m_{b,1} = 2500 \text{ kg} \quad (4.144)$$

$$m_{b,2} = 2500 \text{ kg} \quad (4.145)$$



Obrázek 4.6: Fotografie lokomotivy řady 363. Převzato z [68].

#### 4.7. PARAMETRY POUŽITÉHO VÝPOČTOVÉHO MODELU



Obrázek 4.7: Výkres lokomotivy řady 363. Převzato z [3].

Matice momentů setrvačnosti

$$\mathbf{J}_{b,1} = \begin{bmatrix} 2.3 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1.9 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2.6 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (4.146)$$

$$\mathbf{J}_{b,2} = \begin{bmatrix} 2.3 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1.9 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2.6 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (4.147)$$

Počáteční poloha těžiště

$$\mathbf{x}_{b,1} = \begin{bmatrix} 0 & 5.8 & 0.765 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ m, rad} \quad (4.148)$$

$$\mathbf{x}_{b,2} = \begin{bmatrix} 0 & 14.2 & 0.765 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ m, rad} \quad (4.149)$$

Počáteční rychlost těžiště

$$\dot{\mathbf{x}}_{b,1} = \begin{bmatrix} 0 & v_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.150)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{b,2} = \begin{bmatrix} 0 & v_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.151)$$

**Dvojkolí**

Hmotnost

$$m_{w,1} = 1250 \text{ kg} \quad (4.152)$$

$$m_{w,2} = 1250 \text{ kg} \quad (4.153)$$

$$m_{w,3} = 1250 \text{ kg} \quad (4.154)$$

$$m_{w,4} = 1250 \text{ kg} \quad (4.155)$$

Matice momentů setrvačnosti

$$\mathbf{J}_{w,1} = \begin{bmatrix} 125 & 0 & 0 \\ 0 & 820 & 0 \\ 0 & 0 & 820 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (4.156)$$

$$\mathbf{J}_{w,2} = \begin{bmatrix} 125 & 0 & 0 \\ 0 & 820 & 0 \\ 0 & 0 & 820 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (4.157)$$

$$\mathbf{J}_{w,3} = \begin{bmatrix} 125 & 0 & 0 \\ 0 & 820 & 0 \\ 0 & 0 & 820 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (4.158)$$

$$\mathbf{J}_{w,4} = \begin{bmatrix} 125 & 0 & 0 \\ 0 & 820 & 0 \\ 0 & 0 & 820 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (4.159)$$

Počáteční poloha těžiště

$$\mathbf{x}_{w,1} = [0 \ 4.2 \ 0.625 \ 0 \ 0 \ 0]^T \text{ m, rad} \quad (4.160)$$

$$\mathbf{x}_{w,2} = [0 \ 7.4 \ 0.625 \ 0 \ 0 \ 0]^T \text{ m, rad} \quad (4.161)$$

$$\mathbf{x}_{w,3} = [0 \ 12.6 \ 0.625 \ 0 \ 0 \ 0]^T \text{ m, rad} \quad (4.162)$$

$$\mathbf{x}_{w,4} = [0 \ 15.8 \ 0.625 \ 0 \ 0 \ 0]^T \text{ m, rad} \quad (4.163)$$

Počáteční rychlost těžiště

$$\dot{\mathbf{x}}_{w,1} = [0 \ v_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \omega_0]^T \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.164)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{w,2} = [0 \ v_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \omega_0]^T \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.165)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{w,3} = [0 \ v_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \omega_0]^T \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.166)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{w,4} = [0 \ v_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \omega_0]^T \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.167)$$

### Primární odpružení

Matice příslušnosti primárních pružin/tlumičů k dvojkolí

$$\mathbf{A}_{p,w} = [1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4]^T \quad (4.168)$$

Matice příslušnosti primárních pružin/tlumičů k podvozkům

$$\mathbf{A}_{p,b} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2]^T \quad (4.169)$$

Matice tuhosti

$$\mathbf{K}_p(1\dots 8) = \begin{bmatrix} 5.0 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 \cdot 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 5.5 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \quad (4.170)$$

Matice tlumení

$$\mathbf{B}_p(1\dots 8) = \begin{bmatrix} 1.0 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 6.0 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s} \quad (4.171)$$

#### 4.7. PARAMETRY POUŽITÉHO VÝPOČTOVÉHO MODELU

Délka pružiny v rovnovážné poloze

$$\mathbf{x}_{0,p}(1...8) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.28 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.172)$$

Předepnutí pružiny v rovnovážné poloze

$$\mathbf{F}_{0,p}(1...8) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 91968.75 \end{bmatrix}^T \text{ N} \quad (4.173)$$

Poloha uchycení pružin na dvojkolí

$$\mathbf{x}_{pw,1}^W = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.174)$$

$$\mathbf{x}_{pw,2}^W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.175)$$

$$\mathbf{x}_{pw,3}^W = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.176)$$

$$\mathbf{x}_{pw,4}^W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.177)$$

$$\mathbf{x}_{pw,5}^W = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.178)$$

$$\mathbf{x}_{pw,6}^W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.179)$$

$$\mathbf{x}_{pw,7}^W = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.180)$$

$$\mathbf{x}_{pw,8}^W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.181)$$

Poloha uchycení pružin na podvozku

$$\mathbf{x}_{pb,1}^B = \begin{bmatrix} -1.0 & -1.6 & 0.14 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.182)$$

$$\mathbf{x}_{pb,2}^B = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.6 & 0.14 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.183)$$

$$\mathbf{x}_{pb,3}^B = \begin{bmatrix} -1.0 & 1.6 & 0.14 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.184)$$

$$\mathbf{x}_{pb,4}^B = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.6 & 0.14 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.185)$$

$$\mathbf{x}_{pb,5}^B = \begin{bmatrix} -1.0 & -1.6 & 0.14 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.186)$$

$$\mathbf{x}_{pb,6}^B = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.6 & 0.14 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.187)$$

$$\mathbf{x}_{pb,7}^B = \begin{bmatrix} -1.0 & 1.6 & 0.14 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.188)$$

$$\mathbf{x}_{pb,8}^B = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.6 & 0.14 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.189)$$

#### Sekundární odpružení

Matice příslušnosti sekundárních pružin/tlumičů k podvozkům

$$\mathbf{A}_{s,b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T \quad (4.190)$$

Matice příslušnosti sekundárních pružin/tlumičů k vozidlům

$$\mathbf{A}_{s,v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (4.191)$$

Matice tuhosti

$$\mathbf{K}_s(1...8) = \begin{bmatrix} 1.5 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 4.0 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \quad (4.192)$$

Matice tlumení

$$\mathbf{B}_s(1\dots 8) = \begin{bmatrix} 6.0 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 6.0 \cdot 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 8.0 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s} \quad (4.193)$$

Délka pružiny v rovnovážné poloze

$$\mathbf{x}_{0,s}(1\dots 8) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.735 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.194)$$

Předepnutí pružiny v rovnovážné poloze

$$\mathbf{F}_{0,s}(1\dots 8) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 171675 \end{bmatrix}^T \text{ N} \quad (4.195)$$

Poloha uchycení pružin na podvozku

$$\mathbf{x}_{sb,1}^B = \begin{bmatrix} -1.2 & 0 & -0.1 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.196)$$

$$\mathbf{x}_{sb,2}^B = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & -0.1 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.197)$$

$$\mathbf{x}_{sb,3}^B = \begin{bmatrix} -1.2 & 0 & -0.1 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.198)$$

$$\mathbf{x}_{sb,4}^B = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & -0.1 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.199)$$

Poloha uchycení pružin na vozidle

$$\mathbf{x}_{sv,1}^V = \begin{bmatrix} -1.2 & -4.2 & -1.1 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.200)$$

$$\mathbf{x}_{sv,2}^V = \begin{bmatrix} 1.2 & -4.2 & -1.1 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.201)$$

$$\mathbf{x}_{sv,3}^V = \begin{bmatrix} -1.2 & 4.2 & -1.1 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.202)$$

$$\mathbf{x}_{sv,4}^V = \begin{bmatrix} 1.2 & 4.2 & -1.1 \end{bmatrix}^T \text{ m} \quad (4.203)$$

### 4.7.2. Trať

Parametry trati jsou získány z článku [1].

Délka trati použitá pro výpočet dynamiky trati

$$L_d = 21.74 \text{ m} \quad (4.204)$$

Počet pražců na tomto úseku

$$N_p = 39 \quad (4.205)$$

Vzdálenost mezi pražci

$$L_p = 0.543 \text{ m} \quad (4.206)$$

Vzdálenost styčných ploch kolejnic

$$L_r = 1.5 \text{ m} \quad (4.207)$$

Plocha průřezu kolejnice

$$A = 7.68 \text{ m}^2 \quad (4.208)$$

#### 4.7. PARAMETRY POUŽITÉHO VÝPOČTOVÉHO MODELU

Kvadratický moment průřezu kolejnice vzhledem k vodorovné ose

$$J_z = 3.04 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4 \quad (4.209)$$

Kvadratický moment průřezu kolejnice vzhledem ke svislé ose

$$J_x = 5.125 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \quad (4.210)$$

Polární moment okolo osy y

$$J_p = J_z + J_x \quad (4.211)$$

Výška těžiště průřezu kolejnice vzhledem k rovině povrchu kolejnice

$$z_{rt} = -0.091 \text{ m} \quad (4.212)$$

Sklon uložení kolejnice (odpovídá uložení 1:40)

$$\theta_{ul} = 1.432^\circ \quad (4.213)$$

Hustota materiálu kolejnice

$$\rho_r = 7850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad (4.214)$$

Modul pružnosti materiálu kolejnice

$$E_r = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \quad (4.215)$$

Poissonův poměr materiálu kolejnice

$$\mu_r = 0.3 \quad (4.216)$$

Tuhost příčné vazby mezi kolejnicí a pražcem

$$k_{u,x} = 143 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \quad (4.217)$$

Tlumení příčné vazby mezi kolejnicí a pražcem

$$b_{u,x} = 40 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s} \quad (4.218)$$

Tuhost svislé vazby mezi kolejnicí a pražcem

$$k_{u,z} = 239 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \quad (4.219)$$

Tlumení svislé vazby mezi kolejnicí a pražcem

$$b_{u,z} = 3 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s} \quad (4.220)$$

Tuhost torzní vazby mezi kolejnicí a pražcem

$$k_\varphi = 72 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1} \quad (4.221)$$



#### 4. VÝPOČTOVÝ MODEL

Tlumení torzní vazby mezi kolejnicí a pražcem

$$b_{\varphi} = 5 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{s} \quad (4.222)$$

Tuhost příčné vazby mezi pražcem a základnou

$$k_{s,x} = 141 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \quad (4.223)$$

Tlumení příčné vazby mezi pražcem a základnou

$$b_{s,x} = 27 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s} \quad (4.224)$$

Tuhost svislé vazby mezi pražcem a náhradní hmotou podloží

$$k_b = 110 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \quad (4.225)$$

Tlumení svislé vazby mezi pražcem a náhradní hmotou podloží

$$b_b = 250 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s} \quad (4.226)$$

Tuhost svislé vazby mezi náhradní hmotou podloží a základnou

$$k_g = 371 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \quad (4.227)$$

Tlumení svislé vazby mezi náhradní hmotou podloží a základnou

$$b_g = 200 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s} \quad (4.228)$$

Tuhost podélné vazby mezi sousedními náhradními hmotami podloží

$$k_c = 250 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \quad (4.229)$$

Tlumení podélné vazby mezi sousedními náhradními hmotami podloží

$$b_c = 40 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s} \quad (4.230)$$

Hmotnost pražce

$$m_s = 244 \text{ kg} \quad (4.231)$$

Moment setrvačnosti pražce

$$I_{s,y} = 31.6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (4.232)$$

Hmotnost náhradní hmoty podloží

$$m_b = 7500 \text{ kg} \quad (4.233)$$

#### 4.7. PARAMETRY POUŽITÉHO VÝPOČTOVÉHO MODELU

##### 4.7.3. Kontakt

Profil kola

$$S1002 \quad (4.234)$$

Průměr kola

$$R_0 = 0.625 \text{ m} \quad (4.235)$$

Profil kolejnice

$$UIC60 \quad (4.236)$$

Modul pružnosti materiálu kola

$$E_w = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \quad (4.237)$$

Poissonův poměr materiálu kola

$$\mu_w = 0.3 \quad (4.238)$$

Modul pružnosti materiálu kolejnice

$$E_r = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \quad (4.239)$$

Poissonův poměr materiálu kolejnice

$$\mu_r = 0.3 \quad (4.240)$$

Součinitel smykového tření

$$f = 0.5 \quad (4.241)$$

##### 4.7.4. Ostatní parametry

Vektor tíhového zrychlení

$$\mathbf{g}^G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -9.81 \end{bmatrix}^T \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (4.242)$$

Koeficient odporu vzduchu

$$C_v = 2.5 \quad (4.243)$$

Časový krok dynamiky vozidla

$$t_d = 1 \cdot 10^{-6} \text{ s} \quad (4.244)$$

Časový krok vyhodnocování sil v kontaktu a dynamiky kolejového svršku

$$t_c = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s} \quad (4.245)$$

## 5. Výsledky

Na výpočtovém modelu představeném v předchozí kapitole byly provedeny čtyři studie projevů v kontaktních plochách za různých podmínek, a to chování vozidla s ploškou na dvojkolí, se zvlněním na kolech, zvlněním kolejnic a při jízdě v oblouku. Výsledky výpočtů jsou prezentovány v následující kapitole.

### 5.1. Jízda vozidla s ploškami na kolech po rovné trati

Plošky na kolech mohou vzniknout například dočasným zablokováním dvojkolí nebo dlouhým stáním ve stanici. Proto je lze očekávat spíše u vagónů než lokomotiv. Tento typ opotřebení je však velmi nebezpečný, protože při něm vznikají rázy, které způsobují zvýšené opotřebení kolejnic, a hluk, který se přenáší do vozidla i jeho okolí.

#### 5.1.1. Matematický popis nerovností

Kolo s ploškou má tvar vzniklý odečtením malé kruhové úseče od plného kruhu. Tento tvar ovšem není jednoduché popsat v polárních souřadnicích a jeho součástí jsou ostré hrany, které by u reálného kola byly zaobleny. Proto je v modelu použitém pro tuto sérii výpočtů vyjádřena exponenciální funkcí. Poloměr kola jako funkce úhlu po obvodu je pak

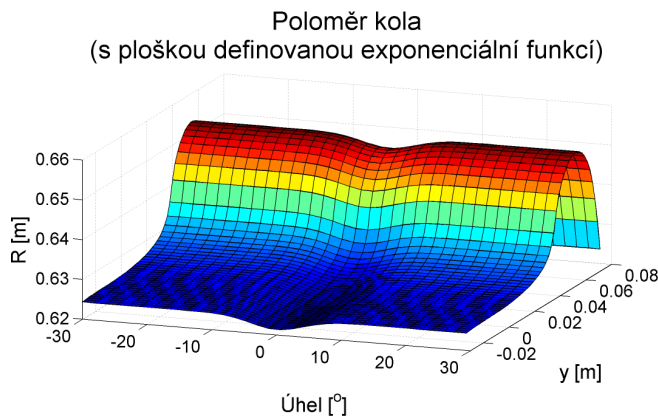
$$R_n(\alpha_d) = R_0 - A_{fs} \cdot \exp(-B_{fs} \cdot \alpha_d^2) \quad \text{pro } \alpha_d \in \langle -\pi; \pi \rangle \quad (5.1)$$

$R_0$  je poloměr kola bez opotřebení,  $A_{fs}$  hloubka opotřebení,  $B_{fs}$  určuje šířku opotřebení. Při výpočtech, ve kterých se zkoumal účinek plošek na jednom kole jednotlivých dvojkolí nebo na obou kolech jednotlivých dvojkolí byly použity nerovnosti s parametry

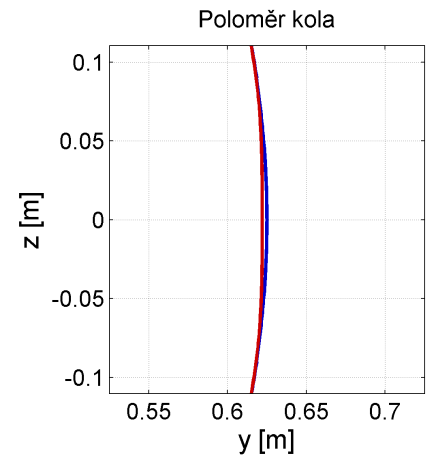
$$A_{fs} = 0.003 \text{ mm} \quad (5.2)$$

$$B_{fs} = 100 \text{ 1/rad}^2 \quad (5.3)$$

Ploška s těmito parametry je 3 mm hluboká a šířka zploštělé části má šířku, která odpovídá přibližně  $20^\circ$  z obvodu kola, viz obrázky 5.1 a 5.2.



Obrázek 5.1: Funkce zmenšení profilu kola. Prohlubeň v okolí úhlu  $0^\circ$  je exponenciální funkce nerovností.



Obrázek 5.2: Srovnání obvodu kola s ploškou (červená) a bez ní (modrá).

## 5.1. JÍZDA VOZIDLA S PLOŠKAMI NA KOLECH PO ROVNÉ TRATI

### 5.1.2. Ploška na jednom z kol dvojkolí

Nejprve bylo zkoumáno, jaký účinek má na dvojkolí, popřípadě na celé vozidlo, ploška, která je na jediném kole některého z dvojkolí. Seznam pozic poškozeného kola je v tabulce 5.1. Ve všech případech jelo vozidlo rychlostí 20 m/s (72 km/h) po rovné trati bez nerovností.

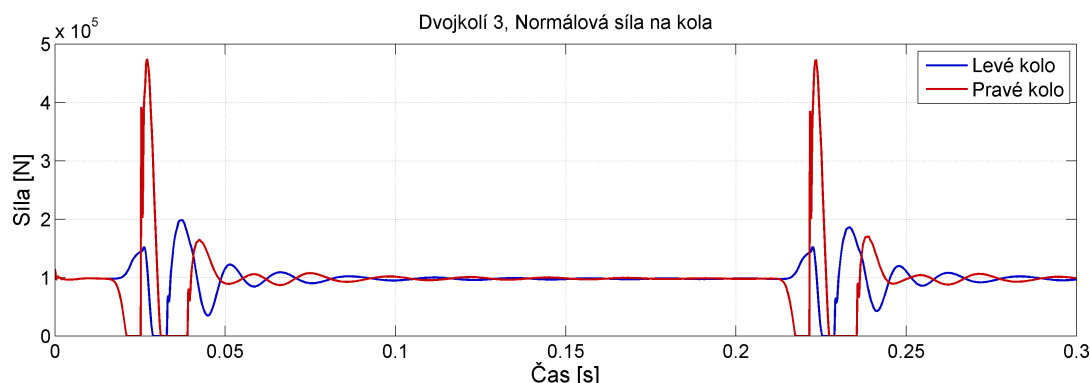
Označení dvojkolí	Podvozek	Dvojkolí	Poškozené kolo
1	Zadní	Zadní	Levé
2	Zadní	Přední	Pravé
3	Přední	Zadní	Pravé
4	Přední	Přední	Levé

Tabulka 5.1: Pozice kola s ploškou.

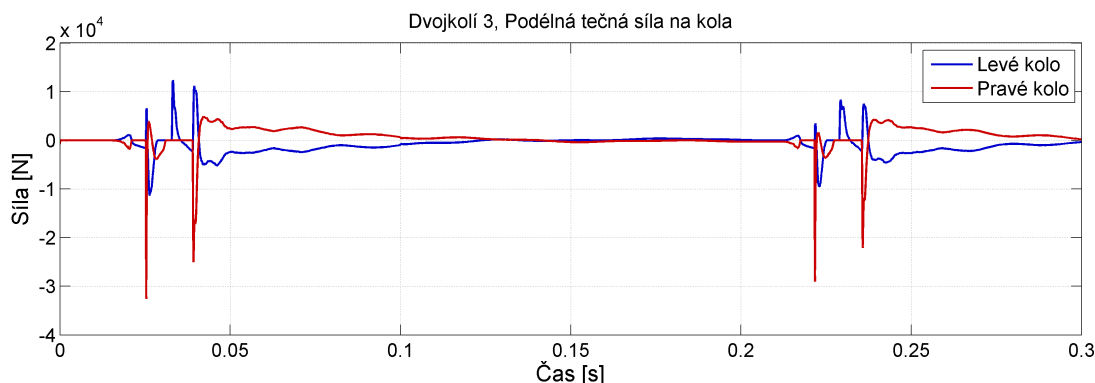
### Rázy vznikající kvůli plošce na kole

V důsledku existence plošky dochází při vyšších otáčkách dvojkolí ke ztrátě kontaktu kola s kolejnicí. Tíhová síla na dvojkolí, síly od primárního odpružení a pokračující rotace kola opět přivedou postižené kolo do kontaktu. Ráz vzniklý při opětovném dosednutí několikanásobně přesáhne nominální zatížení kola (viz obrázek 5.3).

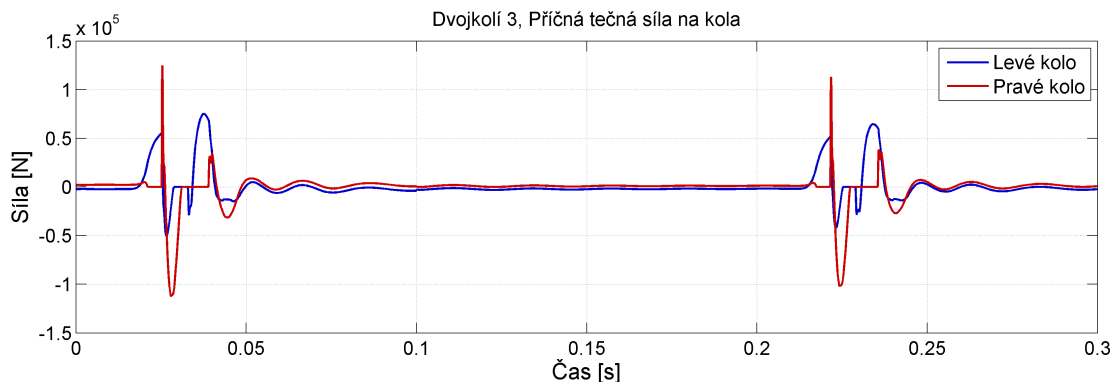
Ve zkoumaném případě dosahuje normálová síla při nárazu pětinasobku nominálního zatížení. Přesná velikost ovšem závisí na přesném tvaru plošky, rychlosti vozidla i dynamických vlastnostech vozidla a kolejového svršku. Z grafu na obrázku 5.3 lze vyčíst, že náraz po opětovném dopadu poškozeného kola má takovou sílu, že se na krátký okamžik ztratí kontakt dokonce na obou kolech. Následné kmity v kontaktní síle jsou pak znatelné celou čtvrtinu otáčky kola.



Obrázek 5.3: Normálové síly na dvojkolí s ploškou na pravém kole.



Obrázek 5.4: Podélné tečné síly na dvojkolí s ploškou na pravém kole.



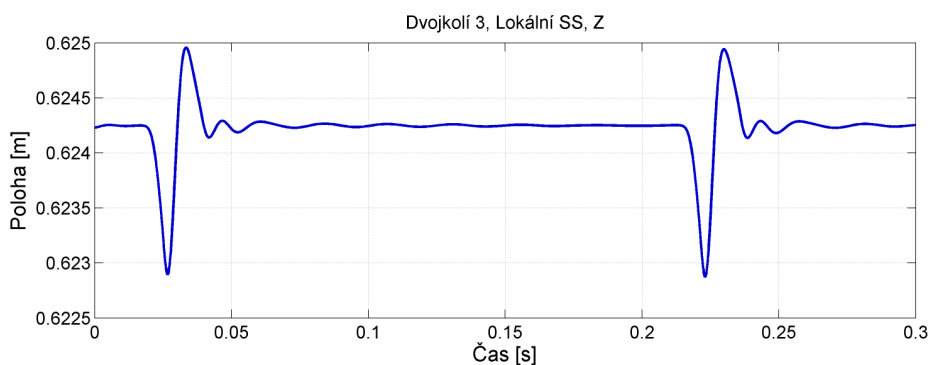
Obrázek 5.5: Podélné příčné síly na dvojkolí s ploškou na pravém kole.

Na obrázcích 5.4 a 5.5 je průběh tečné síly v podélném a příčném směru. V průběhu nárazů se na obou kolech vystřídají síly působící na jednu nebo na druhou stranu a ve zbytku otáčky kola působí síly, které stabilizují dvojkolí ve vystředěné poloze, než nové přejetí přes plošku opět vytvoří rázy.

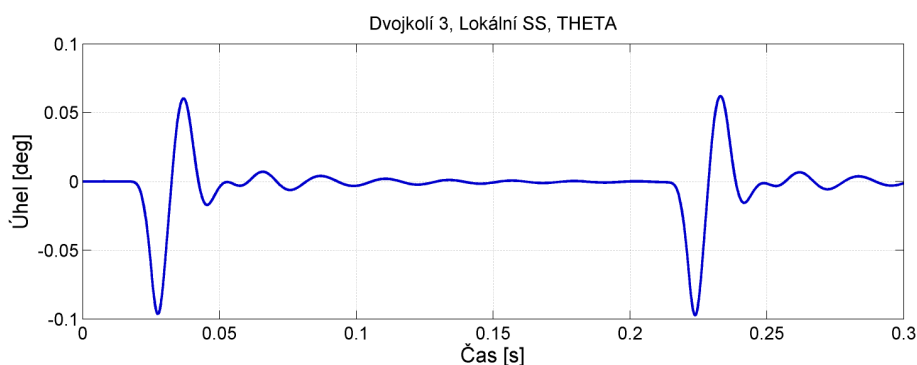
### Ovlivnění pohybu dvojkolí ploškou

Nerovnost na dvojkolí se nejvýrazněji projeví na jeho svislém pohybu (viz obrázek 5.6). Po ztrátě kontaktu poškozeného kola začne těžiště dvojkolí klesat, než dojde k nárazu. Ten dvojkolí odrazí vzhůru až nad rovnovážnou polohu. Mezitím otáčející se kolo posune oblast poškození z kontaktu. Po opětovném dosednutí na nepoškozenou část povrchu dvojkolí ještě několikrát zakmitá a těžiště se ustálí v rovnovážné poloze.

Protože nerovnost je pouze na jednom kole, bude docházet ke kmitům i v klopení dvojkolí (viz obrázek 5.7). Kladná hodnota úhlu klopení  $\theta$  odpovídá zvednutí pravého kola (viz

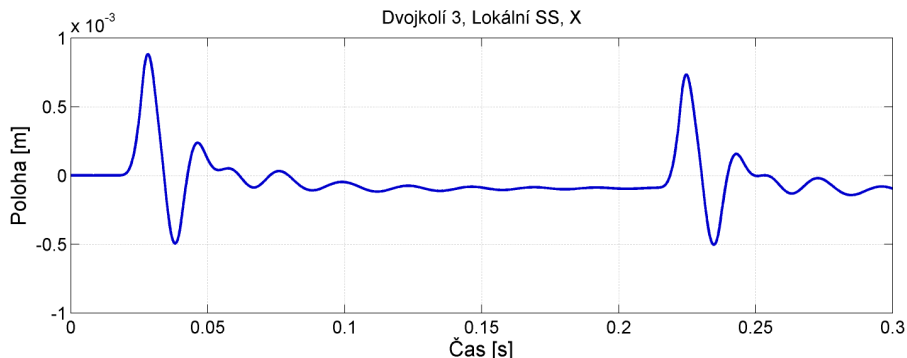


Obrázek 5.6: Svislý pohyb těžiště dvojkolí s ploškou na pravém kole.

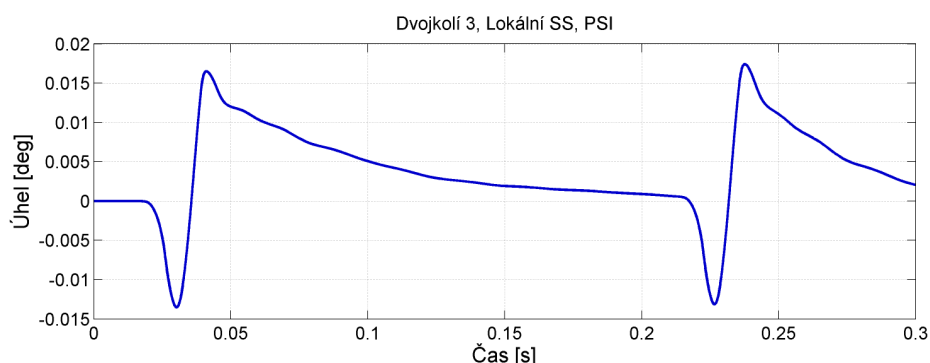


Obrázek 5.7: Klopení dvojkolí s ploškou na pravém kole.

### 5.1. JÍZDA VOZIDLA S PLOŠKAMI NA KOLECH PO ROVNÉ TRATI



Obrázek 5.8: Příčný pohyb těžiště dvojkolí s ploškou na pravém kole.



Obrázek 5.9: Bočení dvojkolí s ploškou na pravém kole.

obrázek 4.2). V tomto případě je poškozeno pravé kolo. Po ztrátě kontaktu tedy toto kolo začne klesat, což se projeví zmenšováním úhlu  $\theta$ . Poté, co se pravé kolo odrazí od kolejnice, změní se i znaménko úhlu  $\theta$ . Po krátké ztrátě kontaktu na obou kolech narazí první pro změnu levé kolo a opět se začne zmenšovat úhel  $\theta$ , aby se poté, podobně jako svislá poloha těžiště, i úhel klopení postupně ustálil na rovnovážné poloze.

Rázy v kontaktu se pomocí tření projevují i v silách v tečném směru a dochází i k ovlivnění příčného pohybu dvojkolí (viz obrázek 5.8) a bočení  $\psi$  (viz obrázek 5.9). Příčný pohyb přesně odpovídá rázům v normálovém směru a jejich projevům v příčné tečné síle. Nejprve po ztrátě kontaktu tlačí levé kolo dvojkolí do kladného směru osy  $x$ , tedy doprava. Při nárazu naopak příčné síly působí doleva a prudce posunou dvojkolí do záporné části osy  $x$ . Druhý náraz, tentokrát výraznější na levém kole, pak dvojkolí opět pošle na druhou stranu od rovnovážné polohy a poté už se po několika kmitech ustálí o zlomek milimetru vlevo od rovnovážné polohy.

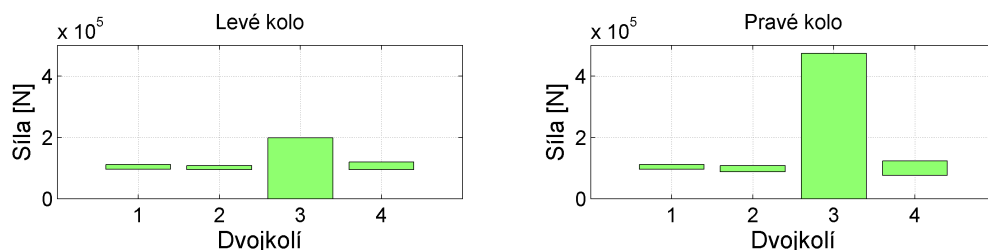
Při kladné hodnotě úhlu bočení  $\psi$  se pravé kolo vysunuje dopředu a dvojkolí se při pohledu shora otáčí proti směru hodinových ručiček. Pro změny pohybu bočení je rozhodující moment, který vytvářejí podélné tečné síly na obou kolech. Tento moment je dán rozdílem mezi podélnými silami na pravém a na levém kole. Pokud je větší síla na pravém kole, moment je kladný a dvojkolí se stáčí proti směru hodinových ručiček. A opačně, když je větší velikost levé síly, stáčí se dvojkolí k zápornému úhlu po směru hodinových ručiček. Podle těchto pravidel pak síly roztáčí dvojkolí. Těsně před a po ztrátě kontaktu pravého kola v čase 0.021 s síla na levé kolo otočí dvojkolí po směru hodinových ručiček (záporné hodnoty bočení). Následný náraz v čase 0.025 s vyvolá moment, který dvojkolí nasměruje do opačného směru. Poté dvě špičky síly na levé kolo v časech 0.033 s a 0.039 s vyvolají záporný moment a opět obrátí smysl otáčení směrem ke nulovému úhlu. Nakonec malý kladný moment ustaluje bočení kola do rovnovážné polohy.

### Přenos rázů z postiženého dvojkolí do zbytku vozidla

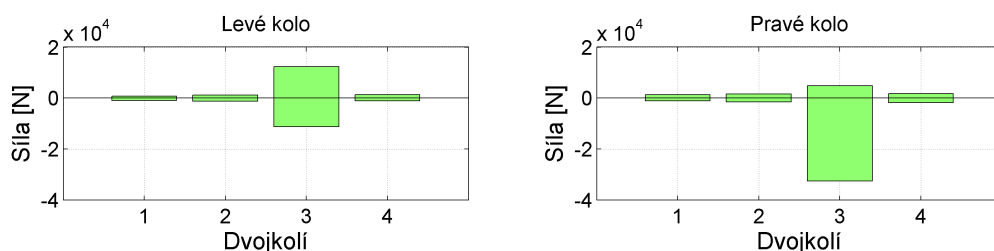
Díky tlumícím účinkům primárního i sekundárního odpružení se účinek rázů na poškozené dvojkolí ve zbytku vozidla neprojevuje nijak výrazně. Vozidlem se přenášejí vibrace, ale amplituda kmitů sil v kontaktech nepoškozených kol je mnohem menší než rázy poškozeného kola, viz obrázky 5.10, 5.12 a 5.11. Sloupcové grafy na těchto obrázcích ukazují rozsah od minima normálové nebo tečné síly v daném směru po maximum a vyplývá z nich, že rozmezí sil působících na dvojkolí s poškozeným kolem jsou řádově větší než síly na ostatní dvojkolí.

V pohybu ve svislém směru (svislý pohyb těžiště  $z$ , klopení  $\theta$ ) primární odpružení dokonale oddělí pohyb poškozeného dvojkolí od ostatních, viz obrázky 5.13 vpravo a 5.14 vpravo. Sloupcové grafy na těchto obrázcích ukazují, že pohyb nepoškozených dvojkolí je minimální.

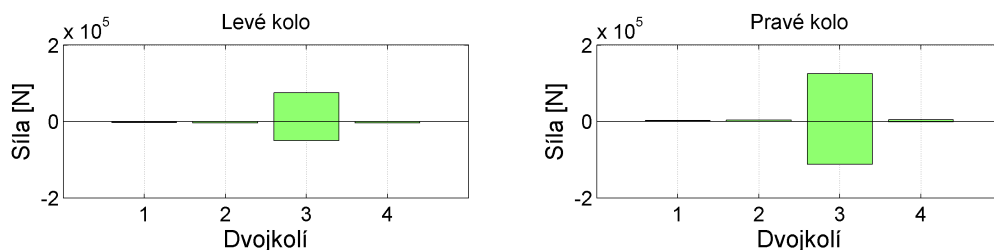
Naopak v pohybech ve vodorovném směru (příčný pohyb těžiště  $x$ , bočení  $\psi$ ) se příčné rázy přenesou na podvozek a významně ovlivní i druhé dvojkolí na stejném podvozku, viz obrázky 5.13 vlevo a 5.14 vlevo. Amplituda kmitů u dvojkolí 4 (na stejném podvozku) je sice řádově nižší než u kmitů poškozeného dvojkolí 3, ale stále řádově vyšší než dvojkolí druhého podvozku.



Obrázek 5.10: Rozsah normálových sil v kontaktu kola a kolejnice u vozidla s ploškou na pravém kole třetího dvojkolí.

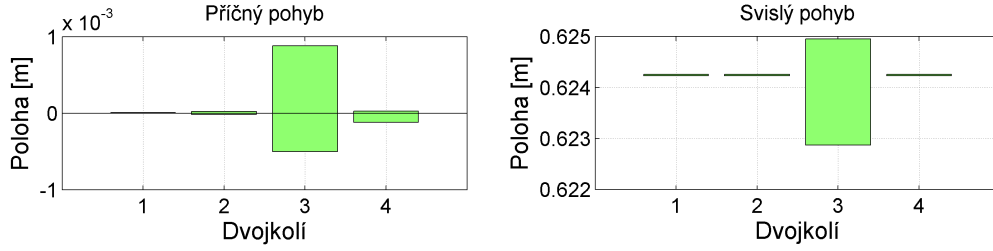


Obrázek 5.11: Rozsah podélných tečných sil v kontaktu kola a kolejnice u vozidla s ploškou na pravém kole třetího dvojkolí.

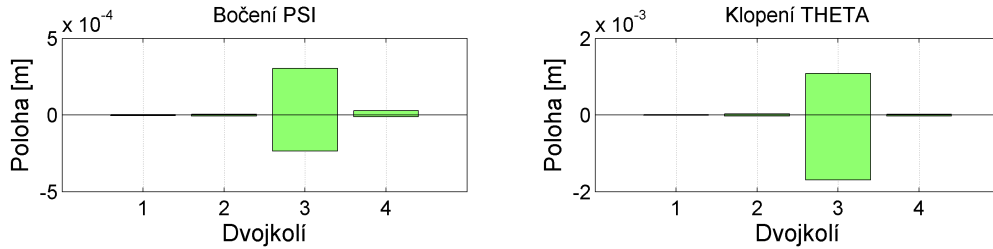


Obrázek 5.12: Rozsah příčných tečných sil v kontaktu kola a kolejnice u vozidla s ploškou na pravém kole třetího dvojkolí.

### 5.1. JÍZDA VOZIDLA S PLOŠKAMI NA KOLECH PO ROVNÉ TRATI



Obrázek 5.13: Rozsah posuvů těžiště dvojkolí u vozidla s ploškou na pravém kole třetího dvojkolí.



Obrázek 5.14: Rozsah rotací dvojkolí u vozidla s ploškou na pravém kole třetího dvojkolí.

Hodnoty vibrací je však nutné brát jen orientačně, protože pro správné vyhodnocení šíření vibrací ve vozidle by byl potřeba konečnoprvkový model. Obdobně nelze postihnout hluk, který nárazy vyvolávají.

#### Projevy na kontaktních plochách poškozeného kola

Výpočet pohybu vozidla s kolem poškozeným ploškou byl proveden s použitím algoritmu CONTACT (viz kapitoly 3.1.2 a 3.3.5). Tento algoritmus počítá rozložení normálového a tečného tlaku a skluzu v kontaktní ploše. Toho je možné využít k vyhodnocení těchto veličin ve všech místech po obvodu kola a stejně tak i na kolejnici. Takto byla vyhodnocena rozložení maximálního normálového kontaktního tlaku na kolo (obrázek 5.15), maximálního tečného třecího napětí v kontaktu (obrázek 5.16), maximálního skluzu (obrázek 5.17) a maximálního třecího výkonu (obrázek 5.18) v průběhu celého pohybu. Maximální normálový kontaktní tlak, např. dle rovnice 3.34, je

$$p_{I3,max} = \max[p_{I3}(t)] \quad (5.4)$$

v celém rozsahu času  $t$ . Podobně maximální tečné třecí napětí je podle rovnice 3.85

$$p_{I\tau,max} = \max \left[ \sqrt{p_{I1}(t)^2 + p_{I2}(t)^2} \right] \quad (5.5)$$

a maximální skluz (rovnice 3.84)

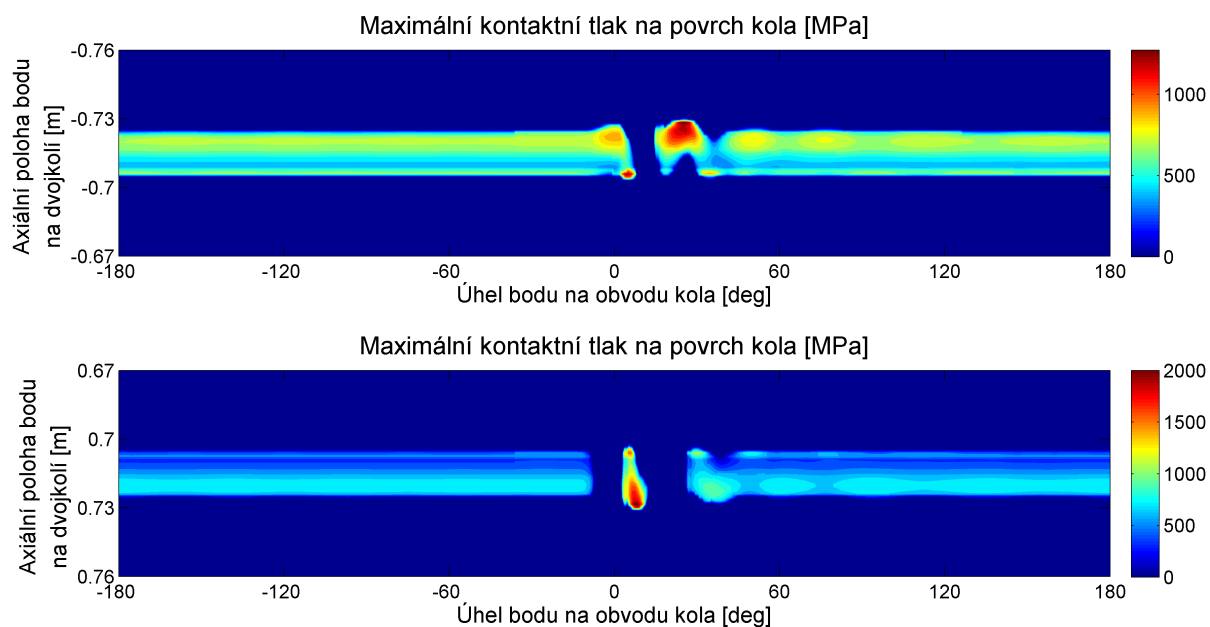
$$s_{I,max} = \max[s_I(t)] \quad (5.6)$$

Maximální třecí výkon (na jednotku plochy) vznikne vynásobením tečného třecího napětí a skluzu

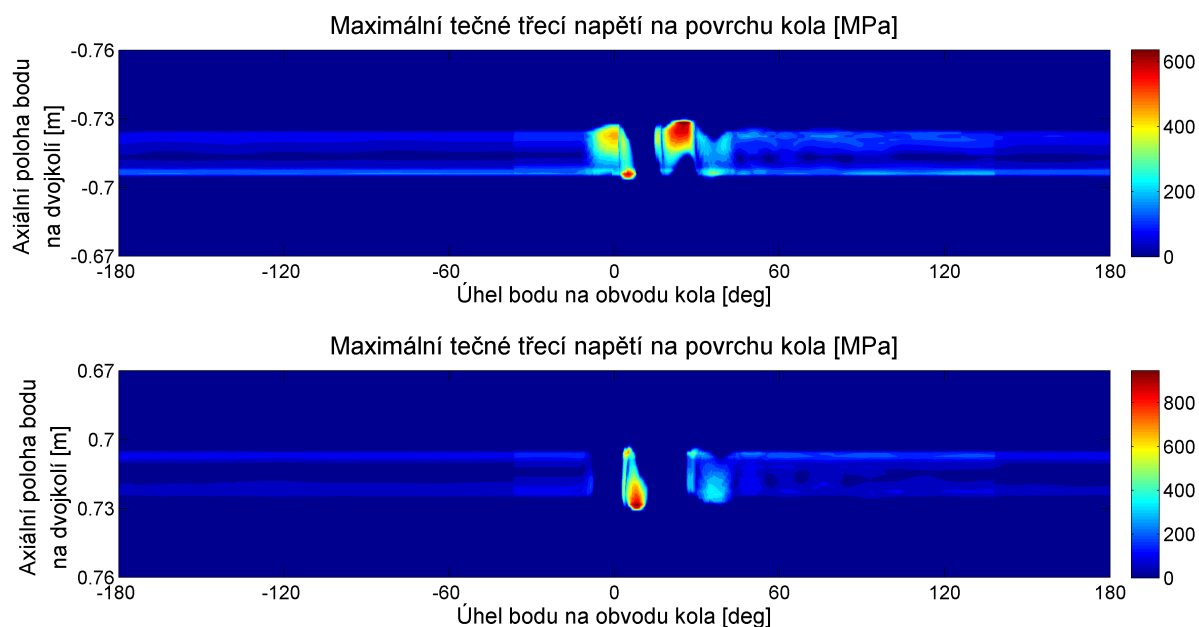
$$w_{If,max} = \max[p_{I\tau}(t) \cdot s_I(t)] \quad (5.7)$$

Na rozložení maximálního normálového kontaktního tlaku (obrázek 5.15) na poškozené pravé kola (obrázek dole) je vidět, že po většinu otáčky kola je stejné rozložení normálového kontaktního tlaku jako u nepoškozeného kola (detail rozložení viz např.



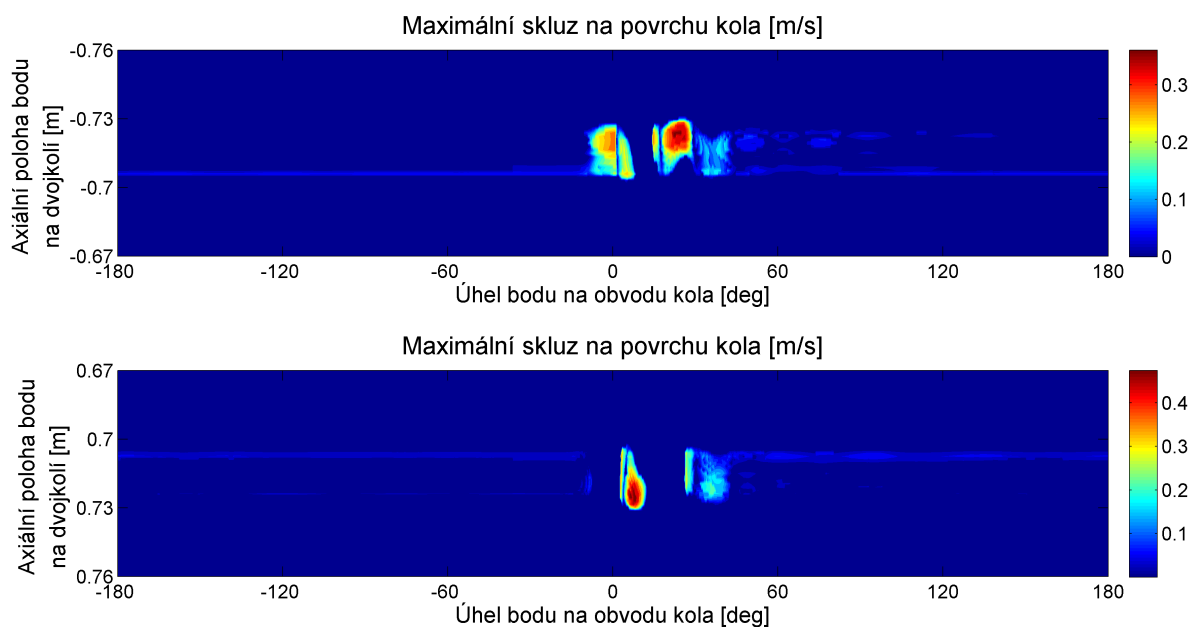


Obrázek 5.15: Rozložení maximálního normálového kontaktního tlaku v průběhu jedné otáčky dvojkolí s ploškou na pravém kole. Nahoře levé kolo, dole pravé kolo.

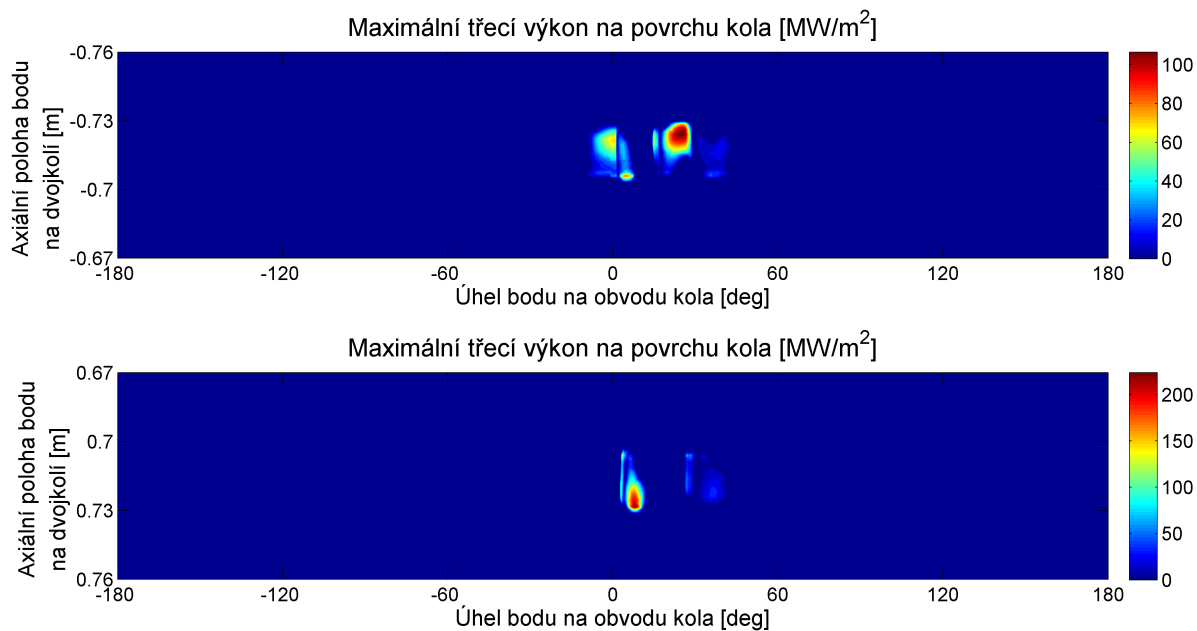


Obrázek 5.16: Rozložení maximálního tečného třecího napětí v průběhu jedné otáčky dvojkolí s ploškou na pravém kole. Nahoře levé kolo, dole pravé kolo.

### 5.1. JÍZDA VOZIDLA S PLOŠKAMI NA KOLECH PO ROVNÉ TRATI



Obrázek 5.17: Rozložení maximálního skluzu v průběhu jedné otáčky dvojkoľi s ploškou na pravém kole. Nahoře levé kolo, dole pravé kolo.



Obrázek 5.18: Rozložení maximálního třecího výkonu v průběhu jedné otáčky dvojkoľi s ploškou na pravém kole. Nahoře levé kolo, dole pravé kolo.

obrázek 3.4(d)).

V okamžiku, kdy se kontaktní plocha na pravém kole dostane k plošce, dochází ke ztrátě kontaktu (oblast od  $-10^\circ$  po  $0^\circ$  s nulovým kontaktním tlakem). Poté dojde k nárazu pravého kola (špička kontaktního tlaku s maximem okolo 2000 MPa), který kolo opět vymrští z kontaktu. Po druhém dosednutí už není maximum normálového kontaktního tlaku natolik výrazné, dojde jen k několika kmitům pozorovatelných zejména v příčném směru.

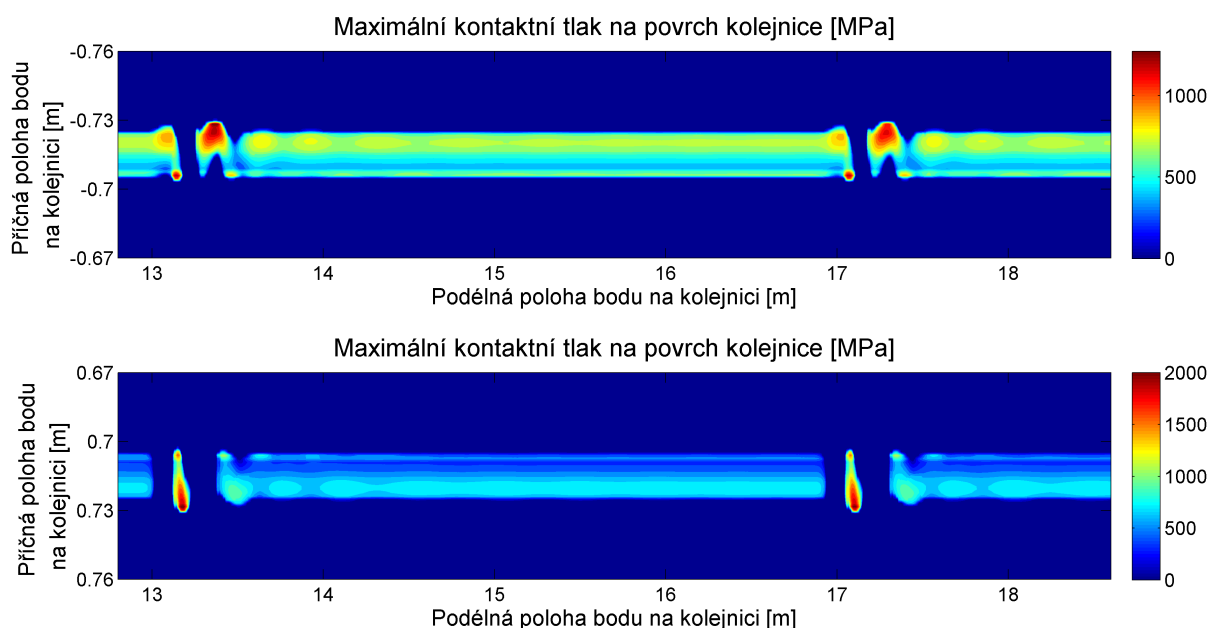
Obdobně je ztráta kontaktu pozorovatelná i na levém, nepoškozeném kole. Po ztrátě kontaktu na pravém kole dojde ke zvýšení maximálního kontaktního tlaku na levém kole. Kontaktní plocha mění i působíště. Po nárazu pravého kola je vymrštěno i levé kolo a po dosednutí ještě dojde k několika kmitům, také hlavně v příčném směru.

V projevech souvisejících s třením, tedy na tečném kontaktním tlaku (obrázek 5.16), skluzu (obrázek 5.17) a hustotě třecího výkonu (obrázek 5.18), se průjezd plošky kontaktem s kolejnicí projeví řadovým zvýšením hodnot všech veličin.

U poškození typu ploška lze tedy očekávat významný vývoj poškození povrchu jak kvůli nárazům na poškozenou plochu, tak kvůli výrazně zvýšenému tření v kontaktní ploše, a to na obou kolech postiženého dvojkolí.

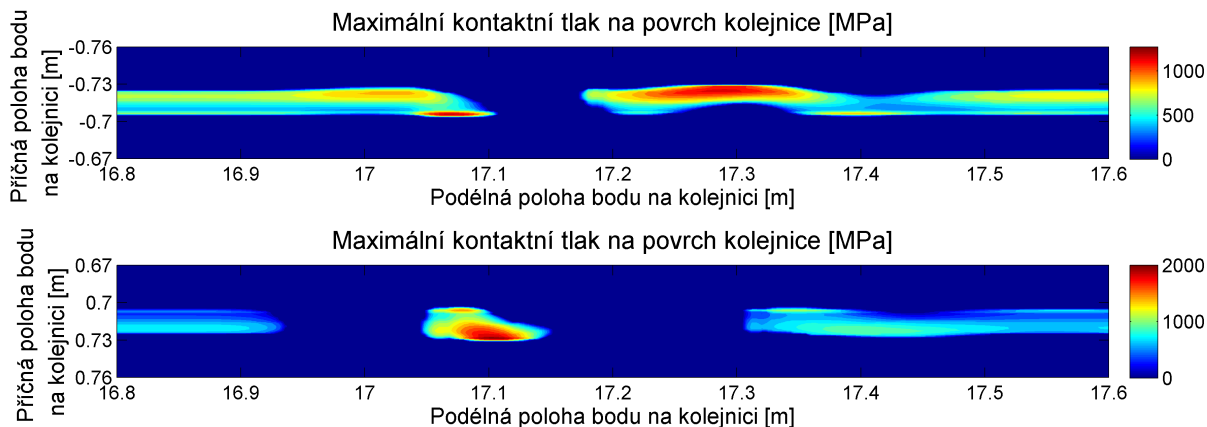
### Projevy na kontaktních plochách kolejnic

Na kontaktní plochy kolejnic se přenáší stejné kontaktní tlaky a skluzy jako na kola. Tak jako se na kole při každé otáčce zopakuje zatížení, tak i na kolejnici se zatížení opakuje pravidelně s otáčkou kola. Obvod kola s poloměrem 0.625 m je 3.927 m, takže přibližně každé 4 m se zopakují projevy související s přejezdem plošky, viz obrázek 5.19, kde je zobrazen průběh kontaktního tlaku na úseku délky 6 m. V grafech rozložení zatížení v kontaktu je osa Y (směr jízdy) orientovaná zleva doprava, osa X (příčný směr) shora dolů, tak aby levá kolejnice byla nahoře, pravá dole a vnitřní hrany kolejnic uprostřed.



Obrázek 5.19: Rozložení maximálního normálového kontaktního tlaku na kolejnicích při průjezdu dvojkolí s ploškou na pravém kole. Nahoře levá kolejnice, dole pravá kolejnice.

### 5.1. JÍZDA VOZIDLA S PLOŠKAMI NA KOLECH PO ROVNÉ TRATI



Obrázek 5.20: Detail rozložení maximálního normálového kontaktního tlaku na kolejnici při průjezdu dvojkolí s ploškou na pravém kole. Nahoře levá kolejnice, dole pravá kolejnice. Měřítko os X a Y je 1:1.

Pro rozložení zatížení na povrchu kol to platí obdobně.

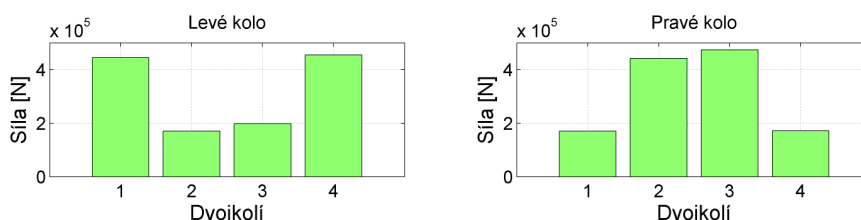
Protože na obrázku 5.19 je značný rozdíl mezi měřítky os X a Y, jeví se zatížené plochy jako tenké linie. Pro lepší srovnání jsou na následujícím obrázku 5.20 měřítka os sladěna a zobrazen pouze úsek kolejnic s přejezdem plošky.

Podobně jako na povrchu kola je i na povrchu kolejnice vidět, jak nejprve dojde ke ztrátě kontaktu poškozeného kola, následnému nárazu, který vymrští nejen poškozené kolo, ale i druhé kolo dvojkolí, a druhému dosednutí kola.

#### Rozdíly mezi polohou poškozeného kola

Výpočty byly provedeny pro různou polohu poškozeného kola ve vozidle, viz tabulka 5.1. Porovnáním průběhů sledovaných veličin, z nichž je zde uveden rozsah normálové síly na kola poškozeného dvojkolí (obrázek 5.21), nebyl nalezen vliv polohy poškození na zatížení poškozeného kola.

Zkoumaný model vozidla ovšem měl zjednodušenou strukturu, která měla vlastnosti obou podvozků a uložení všech čtyř dvojkolí stejné. V případě, že by se odpružení a vazby v podvozku lišily, byly by i projevy v kontaktní ploše rozdílné.

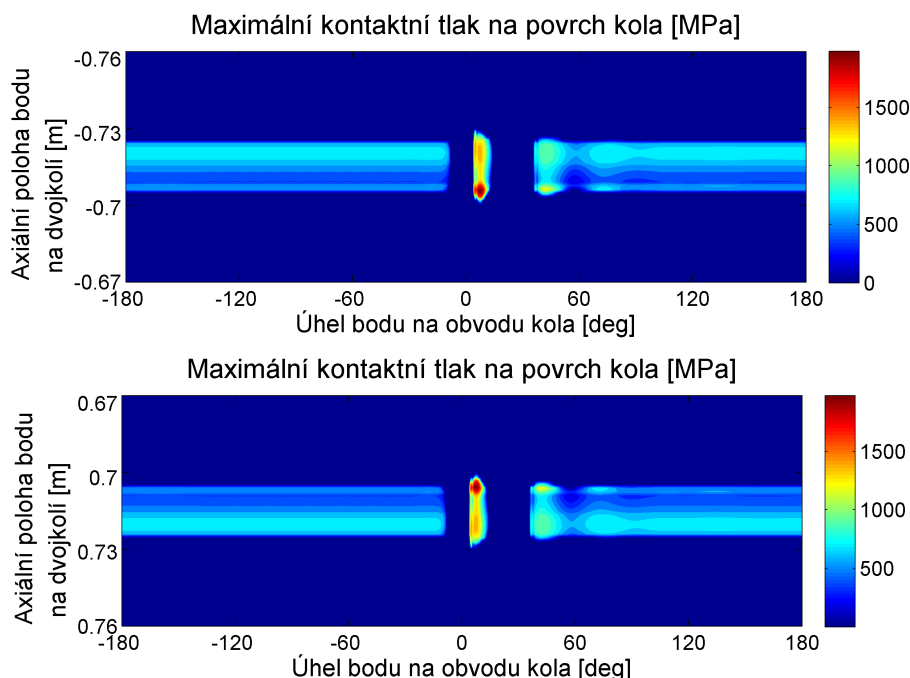


Obrázek 5.21: Rozsahy normálových sil na kolech poškozených dvojkolí. Poškozeno vždy jedno kolo dvojkolí, viz tabulka 5.1.

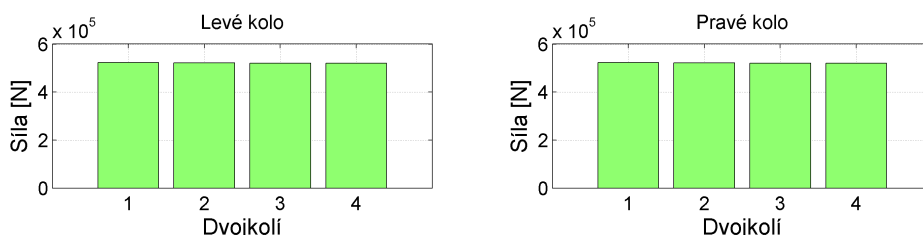
#### 5.1.3. Ploška na obou kolech dvojkolí

Poškození na jednom z kol dvojkolí může vzniknout, pokud toto kolo najede na nějakou překážku na jedné z kolejnic. Pokud ovšem opotřebení vznikne jiným způsobem, např. dlouhým stáním nebo zablokováním dvojkolí, vznikají plošky na obou kolech dvojkolí.

V takovém případě jsou projevy na obou kolech velmi podobné projevům na poškozeném



Obrázek 5.22: Rozložení maximálního normálového kontaktního tlaku v průběhu jedné otáčky dvojkolí s ploškou na obou kolech. Nahoře levé kolo, dole pravé kolo.



Obrázek 5.23: Rozsahy normálových sil na kolech poškozených dvojkolí. Poškozena obě kola dvojkolí, označení dvojkolí viz tabulka 5.1.

kole, např. pro normálovou sílu viz obrázek 5.3 dole. Tím, že jsou poškozena obě kola, dojde v okamžiku přejezdu plošky ke ztrátě kontaktu obou kol zároveň a následný dopad je poté intenzivnější než v případě nepoškozeného kola. Při simulacích se maximální normálová síla v tomto případě zvýšila asi o 10 % ve srovnání s jedním poškozeným kolem, viz obrázek 5.23.

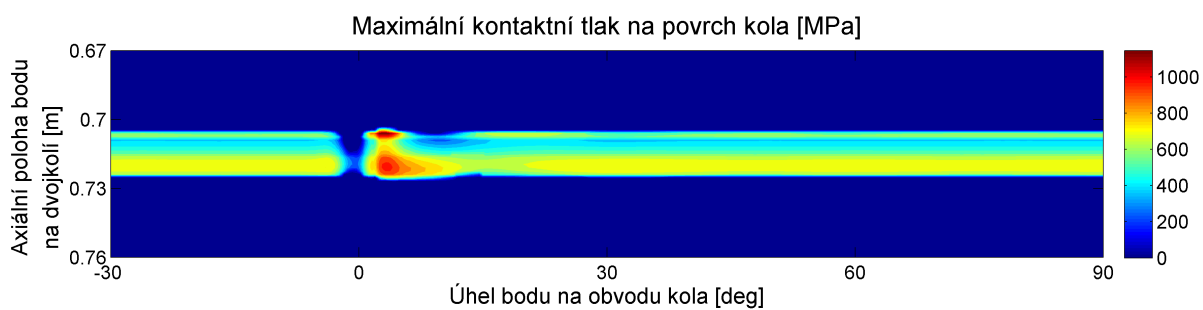
Na kontaktních plochách je v případě stejného zatížení na obou kolech symetrické rozložení kontaktních tlaků a stejné zvlnění v důsledku dopadů, viz obrázek 5.22.

#### 5.1.4. Vliv hloubky opotřebení

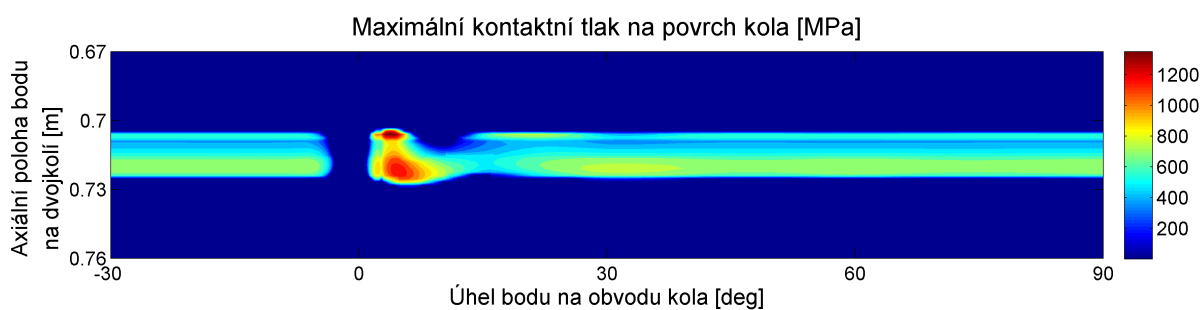
Nejdůležitějším parametrem, který se může měnit v průběhu provozu poškozeného dvojkolí, je hloubka opotřebení. V následující studii byl proto zjišťován vliv hloubky opotřebení v rozsahu 0.5 mm až 5 mm. Parametr  $B_{fs}$  exponenciální funkce nerovností 5.1 byl volen tak, aby nejmenší lokální křivost poškozeného kola byla vždy nulová, tedy aby kolo bylo uprostřed plošky rovné.

Průběhy normálové síly při průjezdu přes plošku jsou zobrazeny na obrázku 5.25. Pro hloubku opotřebení 0.5 mm nedochází vůbec ke ztrátě kontaktu, i když minimální normálová síla je řádově nižší než nominální. K rázu i v tomto případě dochází, ale po dosednutí už normálová síla jen mírně zakmitá. Oproti tomu při hloubkách opotřebení

### 5.1. JÍZDA VOZIDLA S PLOŠKAMI NA KOLECH PO ROVNÉ TRATI



(a) Hloubka nerovností 0.5 mm



(b) Hloubka nerovností 1 mm



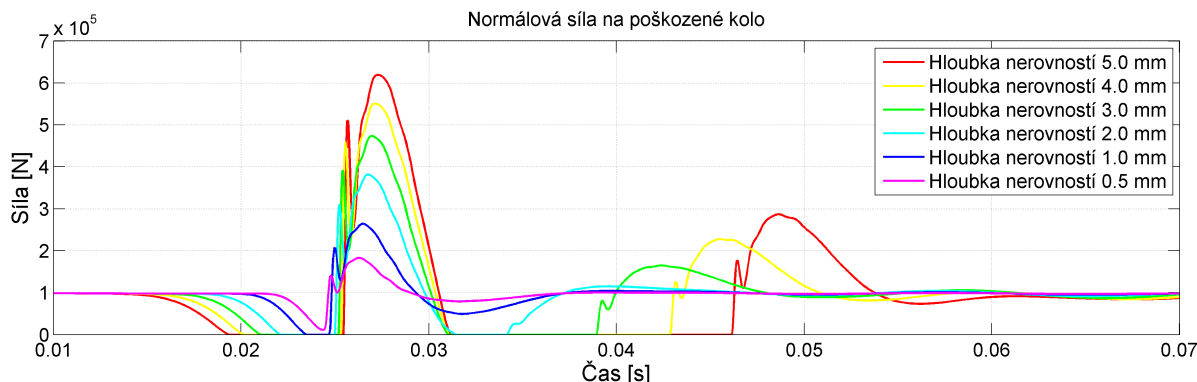
(c) Hloubka nerovností 3 mm



(d) Hloubka nerovností 5 mm

Obrázek 5.24: Rozložení maximálního normálového kontaktního tlaku v průběhu průjezdu plošky na kole. Vliv hloubky nerovnosti.

## 5. VÝSLEDKY



Obrázek 5.25: Normálová síla na kolo s ploškou, srovnání průběhů pro různou hloubku nerovnosti.

3 mm a více už dochází ještě k jednomu rázu.

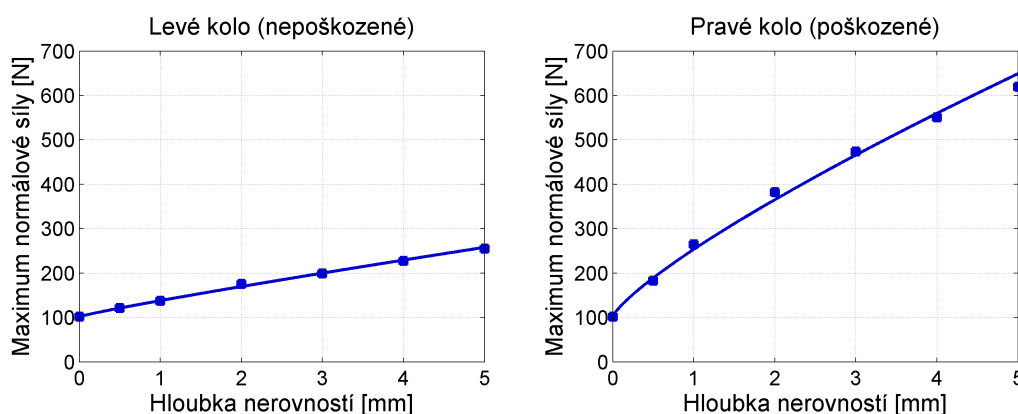
Na obrázku 5.24 jsou rozložení normálového kontaktního tlaku na obvodu kola pro různé hloubky opotřebení. S rostoucí ploškou narůstá jak maximální kontaktní tlak (viz měřítko na pravé straně), tak doba, po kterou poškozené kolo ztratí kontakt s kolejnicí. Na příkladu největšího opotřebení 5 mm (obrázek 5.24(d)) už je patrný velmi prudký první náraz kola. Až při druhém nárazu má rozložení kontaktního tlaku podobný tvar, jako v případě hloubky opotřebení 1 mm.

Na obrázcích 5.26 až 5.28 jsou funkční závislosti významných projevů v kontaktu na hloubce opotřebení. Jsou to maximální normálová síla v kontaktu (obr. 5.26), maximální normálový tlak (obr. 5.27) a maximální třecí výkon na jednotkovou plochu (5.28).

Všechny funkce lze poměrně dobře aproximovat funkcí

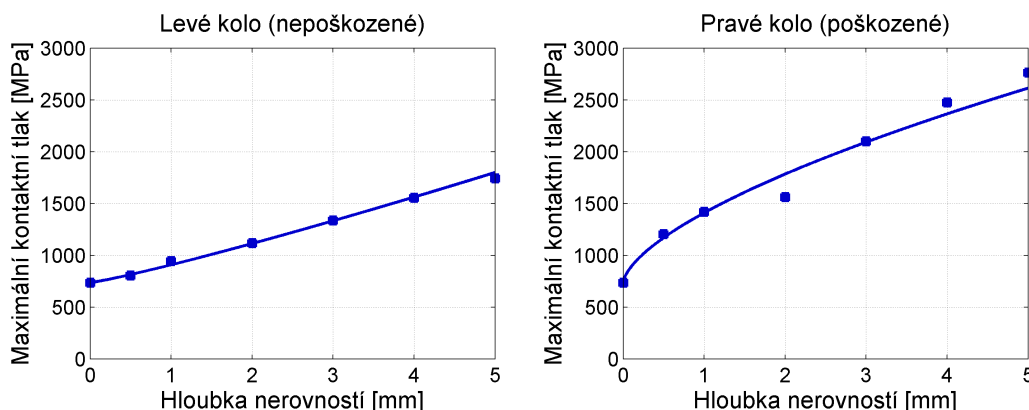
$$y = C_1 + C_2 \cdot x^{C_3} \quad (5.8)$$

Parametry  $C_1$ ,  $C_2$  a  $C_3$  jsou závislé na mechanických vlastnostech soustavy a v tomto případě má nepoškozené dvojkolí maximální normálovou sílu 110 kN, maximální normálový tlak 740 MPa a maximální třecí výkon na jednotku plochy 3.2 MW/m<sup>2</sup>. Tyto hodnoty odpovídají konstantě  $C_1$ . Oproti tomu zatížení při největší řešené hloubce nerovnosti 5 mm je pro nepoškozené kolo maximální normálová síla 250 kN, maximální normálový kontaktní tlak 1900 MPa, maximální třecí výkon na jednotku plochy 130 MW/m<sup>2</sup>. Pro poškozené kolo je to dokonce maximální normálová síla 630 kN, maximální normálový kontaktní tlak 2800 MPa, maximální třecí výkon na jednotku

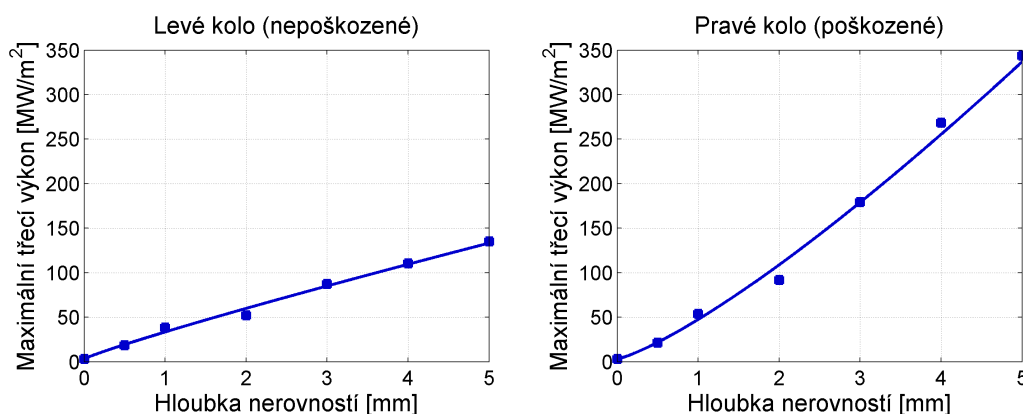


Obrázek 5.26: Závislost maximální normálové síly při dosednutí kola s ploškou na hloubce nerovnosti.

### 5.1. JÍZDA VOZIDLA S PLOŠKAMI NA KOLECH PO ROVNÉ TRATI



Obrázek 5.27: Závislost maximálního normálového kontaktního tlaku při poškozeného kola s ploškou na hloubce nerovností.



Obrázek 5.28: Závislost maximálního třecího výkonu při poškozeného kola s ploškou na hloubce nerovností.

plochy 340 MW/m<sup>2</sup>. Obrovské hodnoty kontaktního tlaku jsou nereálně vysoké, protože použitý model neuvažuje elastické deformace dvojkolí (např. ohyb osy), případně plastické deformace v kontaktu, ale trendy jsou do jisté míry patrné.

Obecně lze říci, že projevy na poškozeném kole jsou několikanásobně vyšší než na nepoškozeném kole postiženého dvojkolí. Co se týká rozdílu zatížení nepoškozeného dvojkolí a dvojkolí s poškozením, roste zatížení až řádově.

#### 5.1.5. Vliv rychlosti vozidla a parametrů zploštění

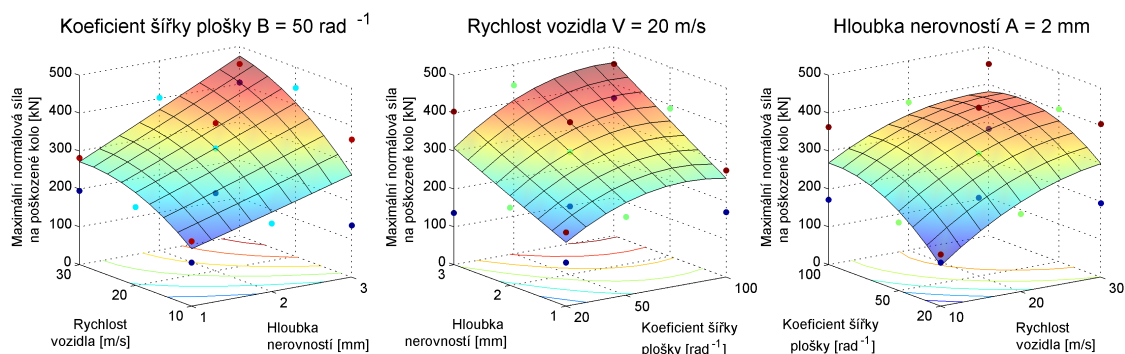
Na projevy v kontaktu kola s kolejnicí má vliv mnoho parametrů, od tvaru nerovností, přes rychlost vozidla, vlastností odpružení až po součinitel smykového tření, ovlivnitelný podmínkami prostředí. Protože je tato práce zaměřena na vliv nerovností, byly zkoumány projevy v kontaktu na základě tvaru nerovností, tedy na hloubce nerovností  $A_{fs}$  a koeficientu šířky plošky  $B_{fs}$ . Třetí důležitý parametr, který může ovlivnit projevy v kontaktu, je rychlost vozidla  $V$ .

Proto byl naplánován experiment, jehož cílem bylo prozkoumat zvolený prostor:  $A_{fs} \in \langle 1; 3 \rangle$  mm,  $B_{fs} \in \langle 20; 100 \rangle$  rad<sup>-2</sup>,  $V \in \langle 10; 30 \rangle$  m/s. Výsledky byla proložena kvadratická odezvoová plocha

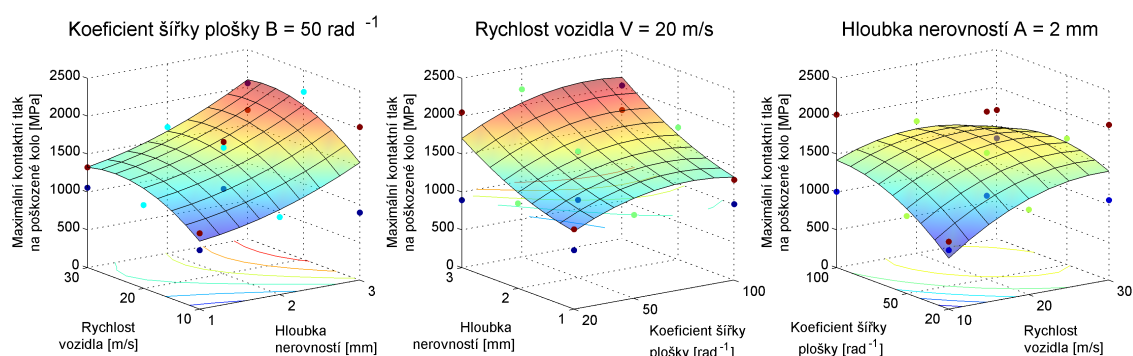
$$Y = f(A_{fs}, B_{fs}, V, A_{fs}^2, B_{fs}^2, V^2, A_{fs} \cdot B_{fs}, B_{fs} \cdot V, V \cdot A_{fs}) \quad (5.9)$$



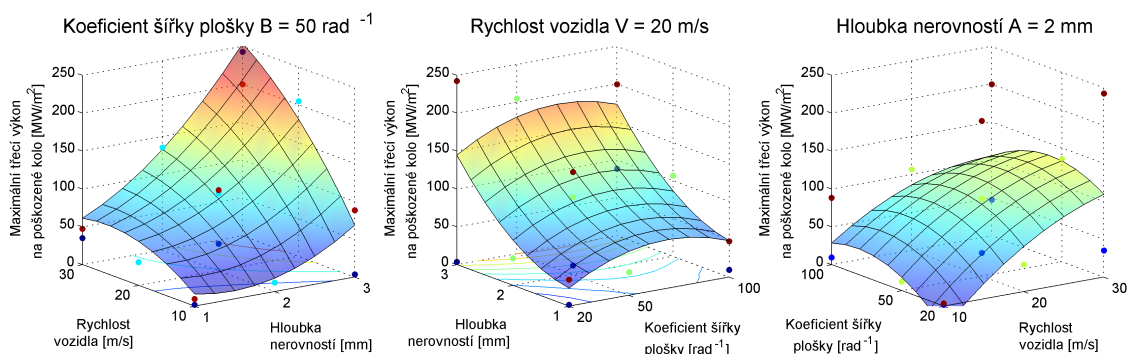
## 5. VÝSLEDKY



Obrázek 5.29: Odezvová plocha maximální normálové síly při dosednutí kola s ploškou.



Obrázek 5.30: Odezvová plocha maximálního normálového kontaktního tlaku při dosednutí kola s ploškou.



Obrázek 5.31: Odezvová plocha maximálního třecího výkonu při dosednutí kola s ploškou.

Výsledné odezvové plochy pro tři hlavní projevy, maximální normálovou sílu, maximální normálový kontaktní tlak a maximální třecí výkon na plochu jsou na obrázcích 5.29 až 5.31.

Výsledná funkce je funkcí tří proměnných, proto ji lze jen obtížně zobrazit. Zobrazení použité v této práci používá sérii tří plošných grafů s jednou z proměnných zafixovanou na střední hodnotě. Všechny body, které byly počítány, pak jsou zobrazeny v grafech s tím, že proměnná, která je v plošném grafu konstantní, je v bodech zohledněna pomocí jejich barvy: nejnižší modrá, střední modrozelená/zelená, nejvyšší červená.

Na základě tvaru zobrazených ploch a vzdálenosti bodů pro nejnižší a nejvyšší hodnotu třetí proměnné lze rozpoznat, s jakou významností je daný projev ovlivněn jednou z proměnných. Takto je možné z obrázku 5.29 poznat, že na maximální normálovou sílu mají srovnatelný vliv všechny proměnné, jen z grafu vpravo, kde je

## 5.2. JÍZDA VOZIDLA S VLNOVÝM OPOTŘEBENÍM KOL PO ROVNÉ TRATI

plošný graf plošší a rozptyl počítaných bodů podle třetí proměnné, je patrný trochu výraznější vliv hloubky nerovností. Stejně je možné vyčíst z grafu vlevo a uprostřed, že závislost maximální normálové síly na hloubce nerovností je v daném rozsahu přibližně lineární, protože plošné grafy jsou minimálně zakřivené ve směru osy odpovídající hloubce nerovností.

Maximální normálový kontaktní tlak podobný normálové síle, závislost pouze není lineární. Maximální normálový kontaktní tlak pak na hloubce nerovností závisí výrazně, protože plošný graf vpravo je velmi plochý a naopak rozptyl počítaných bodů je značný. Maximální kontaktní tlak je tedy ovlivněn zejména tvarem povrchu poškozeného kola. Maximální třecí výkon je pak opět ovlivněn zejména hloubkou nerovností. Z ostatních proměnných je tentokrát minimální vliv koeficientu šířky plošky a naopak vliv rychlosti je výraznější. Což souvisí s velikostí skluzu, který se s rostoucí rychlostí také zvětšuje.

## 5.2. Jízda vozidla s vlnovým opotřebením kol po rovné trati

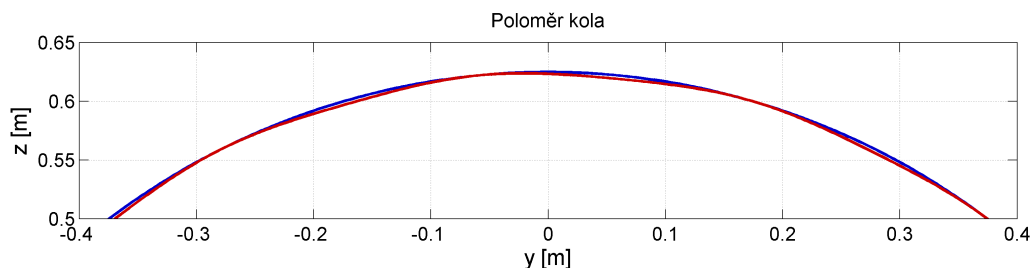
Zvlnění po obvodu kola je opotřebením, které vzniká cyklickým namáháním. Toto opotřebením může vznikat buď v důsledku pohybu dvojkolí po kolejnicích (vrtění dvojkolí) nebo vibracemi. Vlnitými nerovnostmi se zabývá článek [42]. V jeho úvodu jsou zmíněny typické parametry vlnového opotřebením na vlcích provozovaných v Německu. Podle tohoto článku vznikající opotřebením závisí na dynamických vlastnostech vozidla a podvozku. U vlaků ICE bylo pozorováno, že na kole vznikají tři vlny. Jiné opotřebením bylo odhaleno v experimentu, který tento článek také zmiňuje. V tomto případě šlo o nerovnosti s dvaceti vlnami po obvodu kola. Numerická simulace prezentovaná tímto článkem dospěla k sedmi vlnám. Vlnové opotřebením po obvodu kola tedy může mít poměrně široký rozsah. Proto byl v této práci zkoumán vliv hloubky opotřebením, počtu vln a rychlosti vozidla na dynamické odezvy v kontaktu kola a kolejnice.

### 5.2.1. Matematický popis nerovností

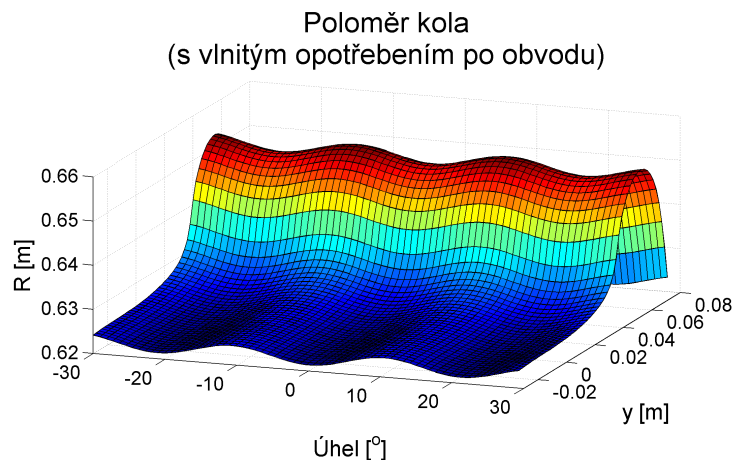
Vlnové opotřebením kol lze nejjednodušším způsobem popsat harmonickou funkcí

$$R_n(\alpha_d) = R_0 - \frac{A_{ww}}{2} \cdot [1 + \cos(N_{ww} \cdot \alpha_d)] \quad \text{pro } \alpha_d \in \langle -\pi; \pi \rangle \quad (5.10)$$

kde  $R_0$  je poloměr nepoškozeného kola,  $A_{ww}$  je hloubka nerovností a  $N_{ww}$  je počet vln na obvodu kola.



Obrázek 5.32: Srovnání obvodu kola se zvlněním (červená) a bez něj (modrá).

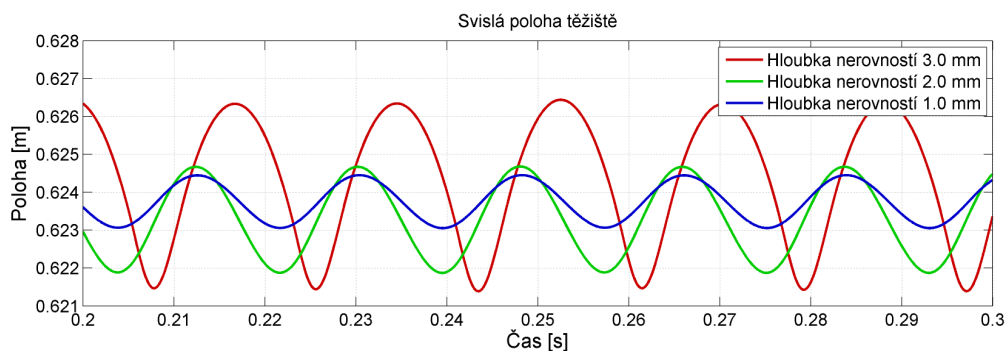


Obrázek 5.33: Funkce poloměru kola se zvlněním. Harmonická funkce nerovností.

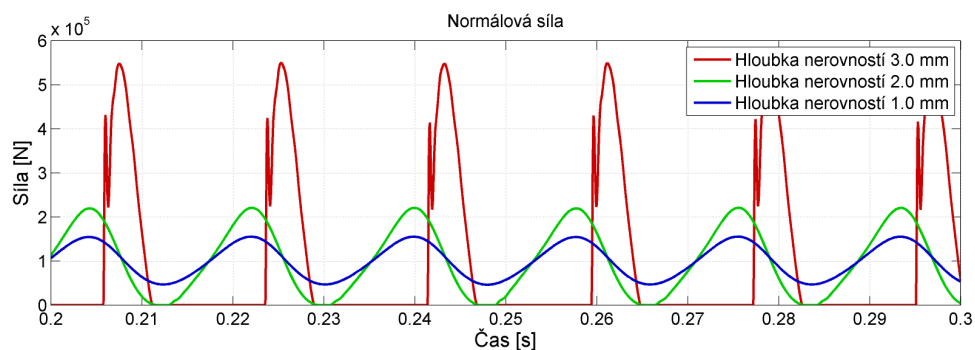
Při použití profilu S1002 má povrch kola v axiálním směru tvar tohoto profilu, v tečném směru pak tvar daný funkcí nerovností. Graf funkce tvaru kola je na obrázku 5.33, srovnání nepoškozeného a poškozeného obvodu kola pak na obrázku 5.32. Při úrovni opotřebení, která je na něm zobrazena, už kolo má na sobě několik plošek, lze tedy očekávat odezvy podobné těm v předchozí části.

### 5.2.2. Projevy nerovností v dynamickém chování vozidla

Zatímco v případě plošky na kole má nerovnost charakter impulzu, který se opakuje při každé otáčce, u vlnového opotřebení vyvolávají nerovnosti harmonické kinematické buzení. U mírnějších nerovností lze proto očekávat odezvu, která bude také harmonická. U výraznějších už se potom začnou více projevovat nelinearity vyplývající z případné ztráty kontaktu.

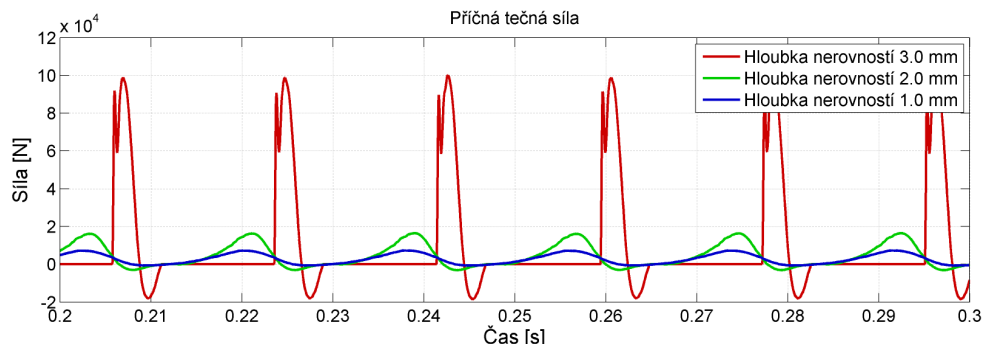


Obrázek 5.34: Svislý pohyb těžiště dvojkolí se zvlněním kol.

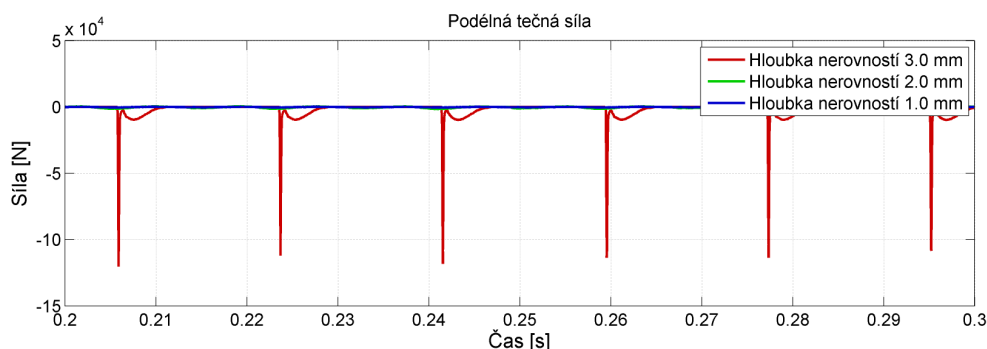


Obrázek 5.35: Normálové síly u dvojkolí se zvlněním kol.

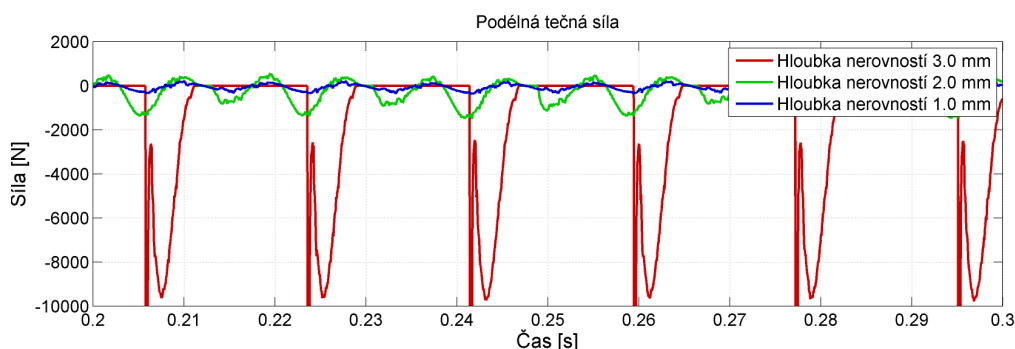
## 5.2. JÍZDA VOZIDLA S VLNOVÝM OPOTŘEBENÍM KOL PO ROVNÉ TRATI



Obrázek 5.36: Příčné tečné síly u dvojkolí se zvlněním kol.



Obrázek 5.37: Podélné tečné síly u dvojkolí se zvlněním kol.



Obrázek 5.38: Detail podélných tečných sil na dvojkolí se zvlněním kol.

V této části je porovnáván vliv hloubky nerovností na pohyb dvojkolí a síly v kontaktu. Nerovnosti byly na obou kolech stejné, podobně jako v části 5.1.3. Odezvy na obou kolech jsou v tomto případě vůči sobě symetrické.

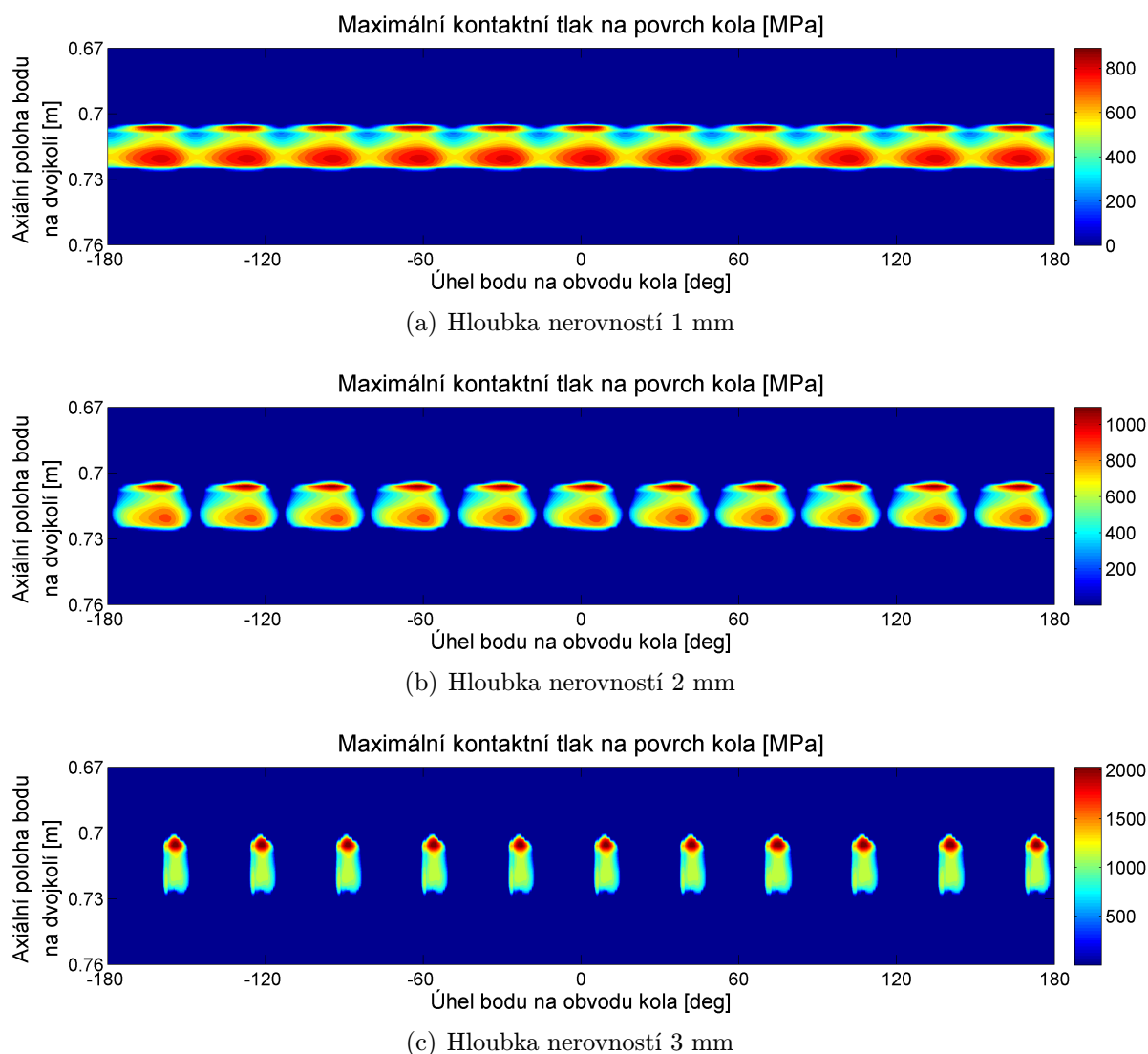
Na prvních dvou obrázcích jsou úzce související projevy. Na obrázku 5.34 je průběh svislé polohy těžiště poškozeného dvojkolí a na obrázku 5.35 normálová síla v kontaktu některého z kol poškozeného dvojkolí a kolejnice. Jak se hloubka nerovností zvětšuje z 1 mm přes 2 mm až ke 3 mm, roste i intenzita projevů. U nerovností o hloubce 1 mm je harmonická odezva jak u svislé polohy těžiště, tak u normálové síly. Při nerovnostech o hloubce 2 mm těžiště vozidla klesne v minimu dvakrát hlouběji, což odpovídá nárůstu opotřebení. Kmity normálové síly už mají větší amplitudu, proto dochází k poklesu hodnoty normálové síly na nulu a krátké ztrátě kontaktu, která však ještě nemá výraznější účinek. Oproti tomu u nerovností o hloubce 3 mm už kolo má zvlnění tak hluboké, že už obvod kola je série plošek tvořící mnohoúhelník se zaoblenými hranami. Takovéto kolo už poskakuje z plošky na plošku. Při každém dopadu kolo dosáhne výrazně vyšší maximální normálové síly než u menší harmonické odezvy, je vymrštěno vzhůru, aby se na další plošce po obvodu kola náraz opakoval.

V případě tečných sil je rozdíl harmonické odezvy a nárazu ještě výraznější. U menších nerovností (hloubka 1 mm a 2 mm) tečné síly kmitají podle toho, jak nerovnosti mají tendenci síly v kontaktu odlehčovat nebo zatěžovat. Příčná tečná síla (obrázek 5.36) je přímo svázána s velikostí normálové síly, pouze s nelineární závislosti.

Na průběhu tečné síly v podélném směru (obrázek 5.38) je vidět, že tato složka síly má dvojnásobnou frekvenci oproti normálové síle. Před změnou svislého pohybu (např. v časech 0.210 s a 0.220 s) má dvojkolí snahu se více zapřít a urychlit pohyb, po změně směru svislého pohybu (např. v časech 0.215 s a 0.225 s) naopak mírně přibrzdí. V případě nárazů je tečné silové působení řádově větší (obrázek 5.37), jak má silové působení snahu vyrovnat impuls, který dvojkolí dostane při nárazu.

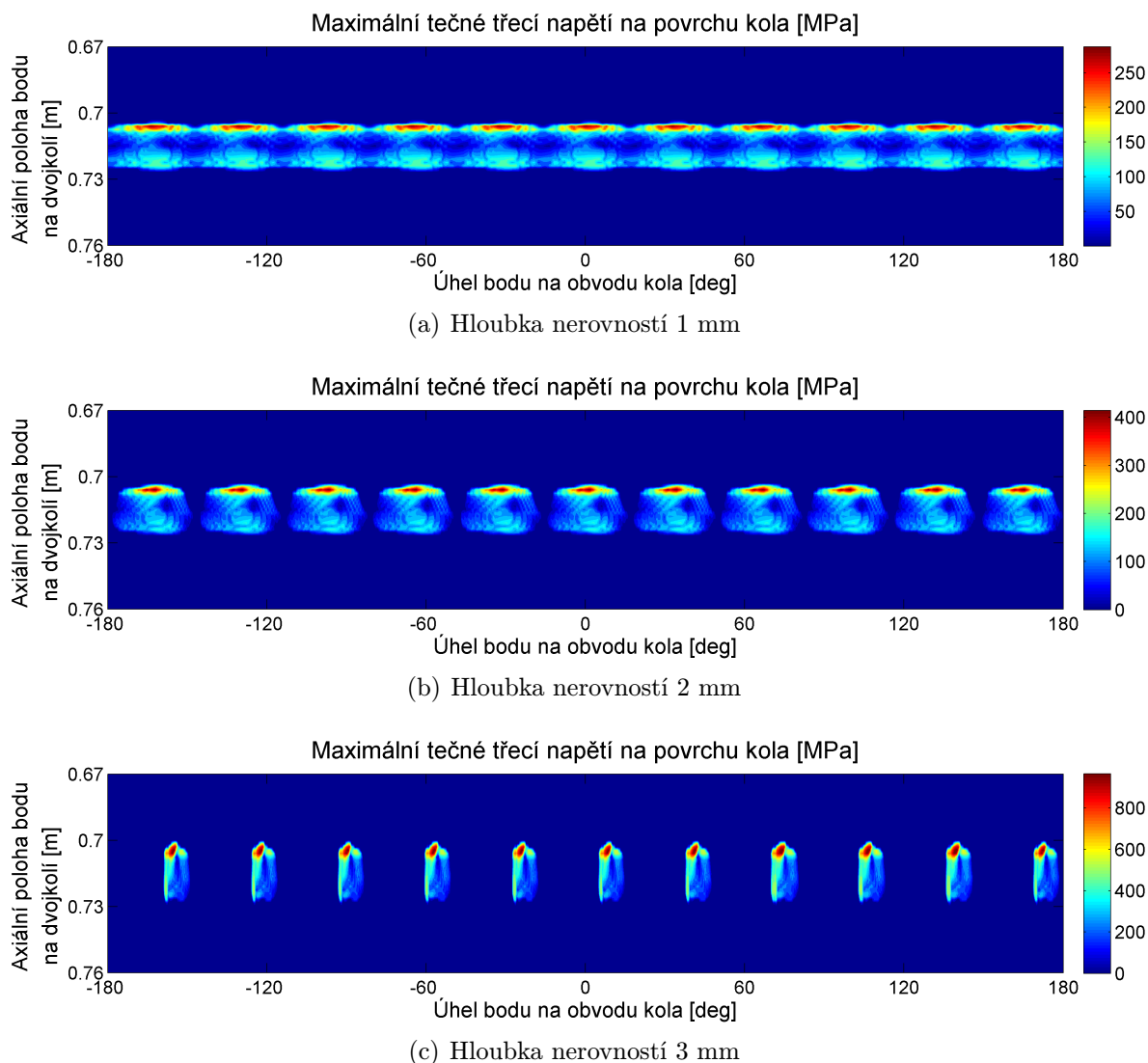
### 5.2.3. Projevy nerovností na kontaktních plochách

Projevy na kontaktních plochách odpovídají silovému působení, které bylo zmíněno v předchozí části. Rozložení maximálního normálového kontaktního tlaku po obvodu kola



Obrázek 5.39: Rozložení maximálního normálového kontaktního tlaku po obvodu zvlněného kola.

## 5.2. JÍZDA VOZIDLA S VLNOVÝM OPOTŘEBENÍM KOL PO ROVNÉ TRATI



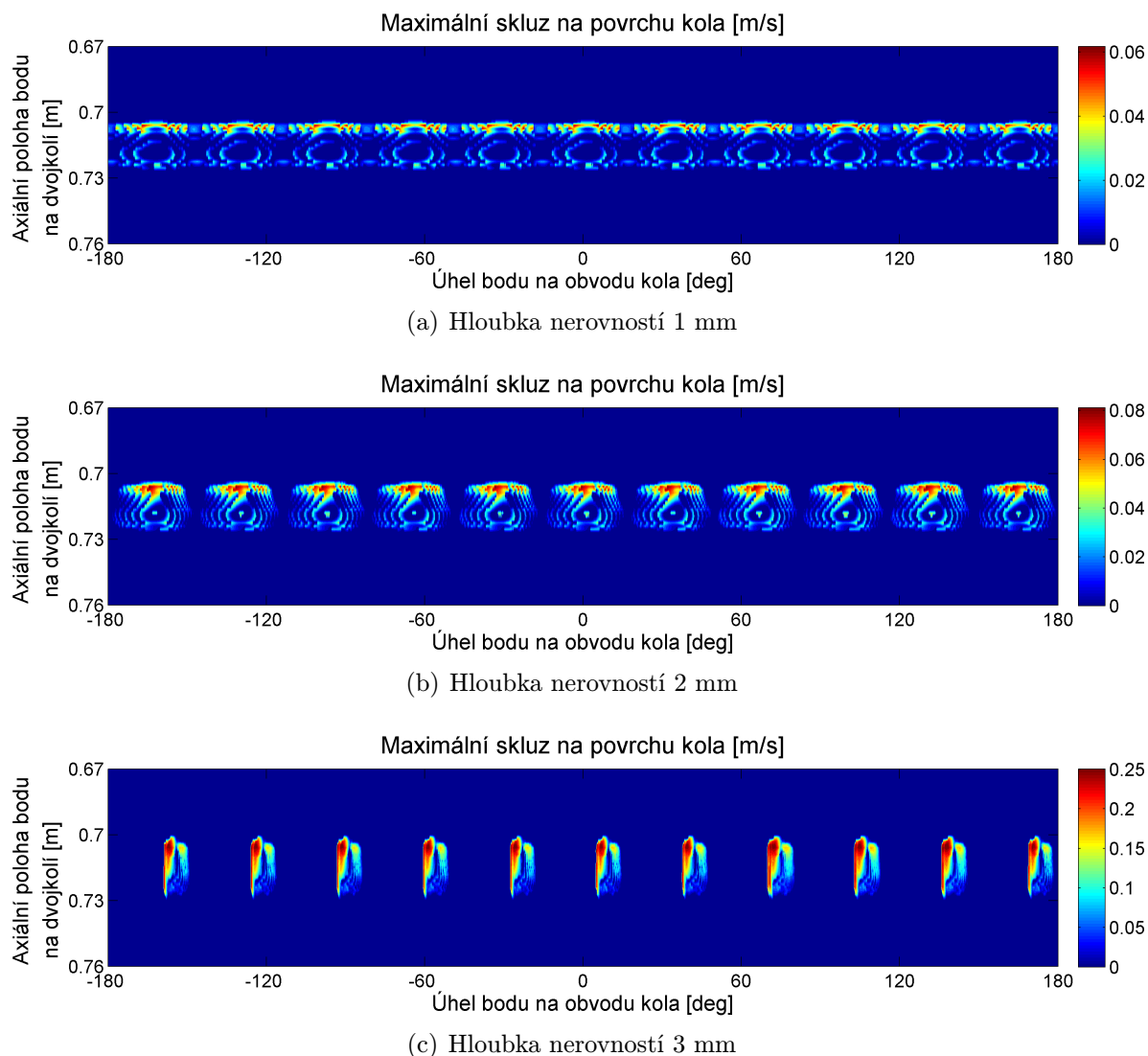
Obrázek 5.40: Rozložení maximálního tečného třecího napětí po obvodu zvlněného kola.

je na obrázku 5.39. V případě hloubky nerovností 1 mm a 2 mm se mění maximum tlaku podle velikosti přenášené síly. Poloha maxim prozrazuje, že největší síla v kontaktu je v okamžiku, kdy roste okamžitý poloměr. Kolo se víc zapře, aby nadzvedlo těžiště dvojkolí. Jakmile se mine maximum poloměru, kolo se naopak odlehčí. Při hloubce nerovností 1 mm se při odlehčení maximální tlak zmenší asi na polovinu, při hloubce nerovností 2 mm se sníží až na nulu.

Odlišná situace je v případě nerovností hlubokých 3 mm. Kolo poskakuje z hrany na hranu, přičemž hranám odpovídá maximální okamžitý poloměr kola. Protože dochází k nárazům, je maximální normálový kontaktní tlak dvojnásobný oproti předchozímu případu.

V případě tečného zatížení (obrázek 5.40) má velký vliv i tvar povrchů v kontaktu a odvalování kola. Proto místo s největším tečným třecím napětím neleží v místě, kde je široká oblast s velkým normálovým tlakem, ale blíže k okolku, resp. vnitřní hraně kolejnice (na obrázku nahoře). To proto, že uprostřed kontaktní plochy se kolo dobře odvaluluje, kdežto v jeho okrajových oblastech je mírně odlišný poloměr kola, a proto i relativní rychlost kola vůči kolejnici roste. Proto zde dochází ke skluzu a tečné třecí napětí je



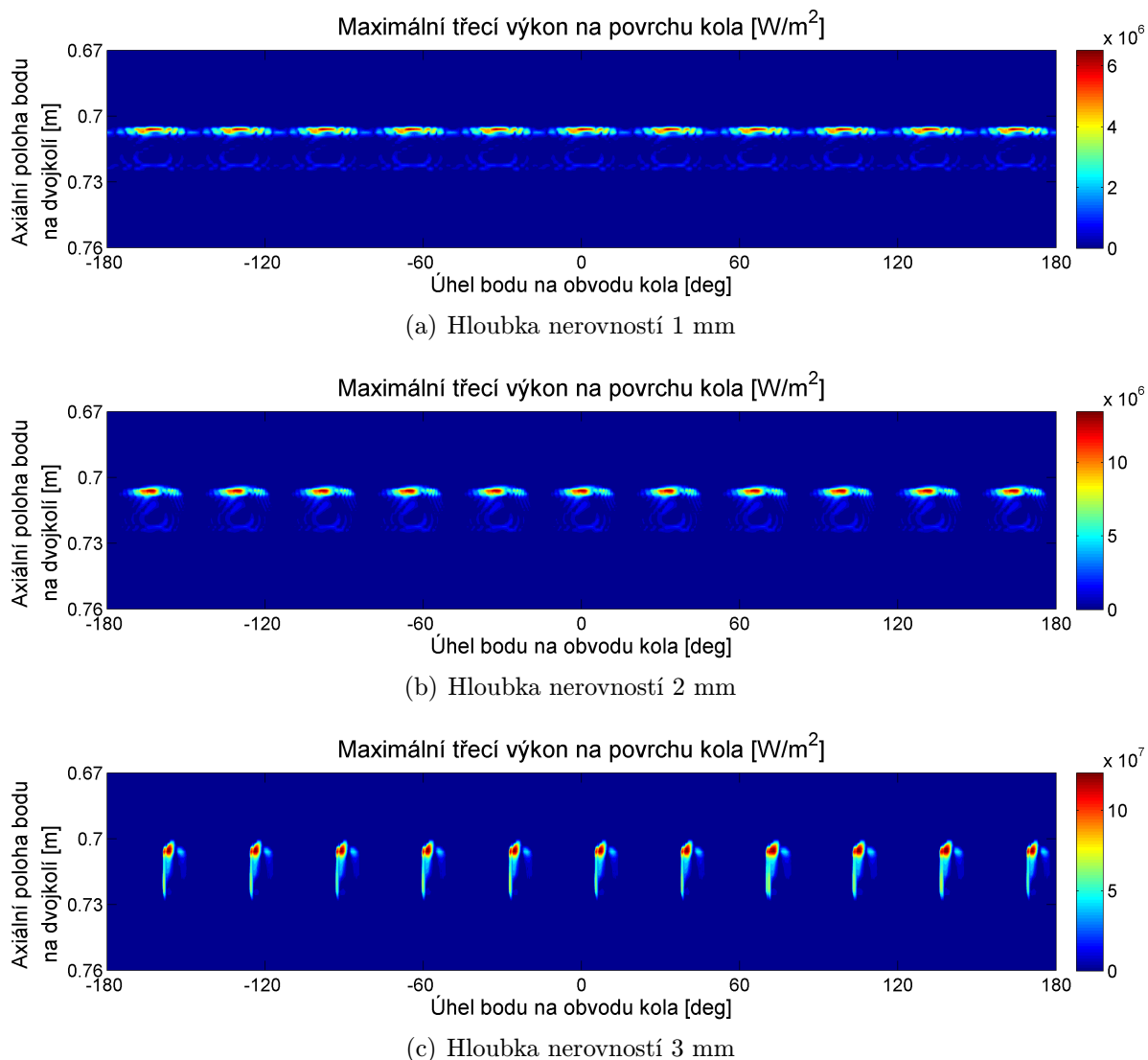


Obrázek 5.41: Rozložení maximálního skluzu po obvodu zvlněného kola.

největší, a to nezávisle na hloubce opotřebení. Hloubka nerovností se projevuje na velikosti maximálního tečného třecího napětí, které při zvětšení nerovností z 1 mm na 2 mm vzroste dvakrát výrazněji než maximální normálový tlak.

Skluz (obrázek 5.41) má oblast s maximální hodnotou na stejném místě jako tečné třecí napětí. Liší se ovšem velikostí. Zatímco při hloubkách opotřebení 1 mm a 2 mm, je maximální skluz přibližně stejně velký, v případě nárazů u hloubky nerovností 3 mm je několiknásobně větší. Dochází k tomu, protože v tomto případě je pohyb už velmi odlišný od odvalování. A zatímco v případě jedné plošky se stav v kontaktu postupně stabilizuje (obrázek 5.17), u takto výrazného zvlnění kolo poskakuje od nárazu k nárazu. Tyto nárazy se pak projevují i na maximálním třecím výkonu (obrázek 5.42). Při zvětšení hloubky nerovností z 1 mm na 2 mm se i maximální třecí výkon přibližně zdvojnásobí. Maxima leží na stejných místech. V případě nerovností hlubokých 3 mm je maximální třecí výkon o řád větší a maximum leží v místě největšího zatížení při dopadnutí kola. Z těchto výsledků lze usuzovat, že zvlněné kolo se pohybuje ve dvou režimech. V případě malého opotřebení je odezva harmonická a zatížení sice výrazně roste, ale není ještě extrémní. V okamžiku, kdy však začne mít poškozené kolo hlubší nerovnosti, tvar

## 5.2. JÍZDA VOZIDLA S VLNOVÝM OPOTŘEBENÍM KOL PO ROVNÉ TRATI



Obrázek 5.42: Rozložení maximálního třecího výkonu po obvodu zvlněného kola.

kola se začne blížit mnohoúhelníku (kolo má na sobě plošky), dochází k větším ztrátám kontaktu a k nárazům. Tyto nárazy způsobují prudké zvýšení zatížení v kontaktu, a tím dále urychlují poškození kola a kolejnice.

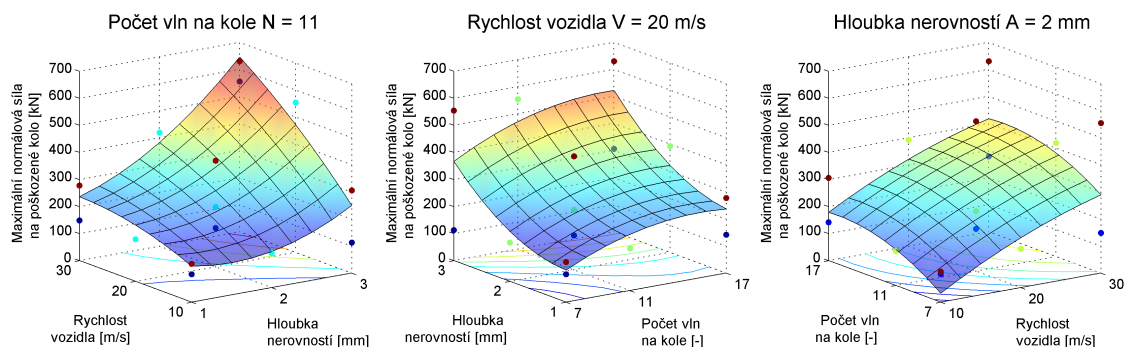
### 5.2.4. Vliv jednotlivých parametrů nerovností

Podobně jako u plošky na kole byla i u zvlněných nerovností provedena studie vlivu jednotlivých parametrů na projevy v kontaktu. Zkoumané parametry byly tentokrát hloubka opotřebení (nerovností)  $A$ , počet vln po obvodu kola  $N$  a rychlost vozidla  $V$ .

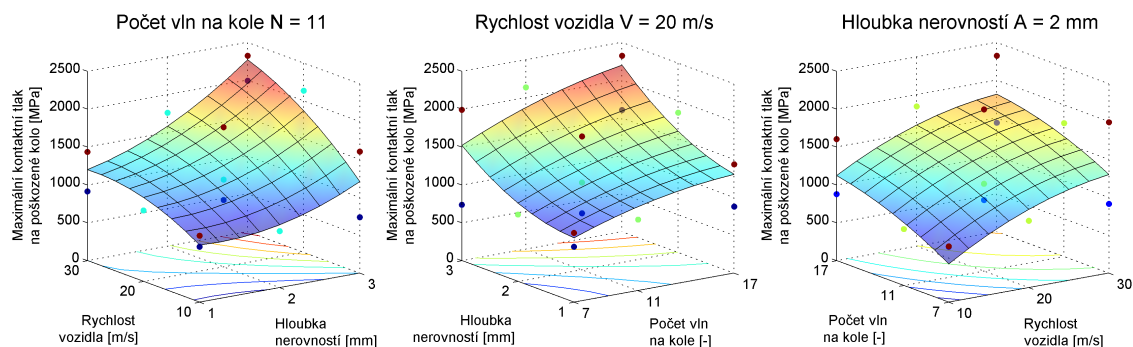
Na maximum normálové síly v kontaktu má hlavní vliv hloubka nerovností, což dokazuje i graf na obrázku 5.43 vpravo, kde vypočítané hodnoty pro nejmenší (modré,  $A = 1$  mm) a největší (červené,  $A = 2$  mm) nerovnosti leží nejdále od odezvové plochy, zobrazené pro střední hloubku nerovností ( $A = 2$  mm). Navíc je i z ostatních grafů obrázku 5.43 patrné, že pro hloubku nerovností velikost normálové síly dozná skokové změny. Je to způsobeno tím, že při opotřebení o hloubce 3 mm vytváří zvlnění již zmíněné plošky a na nich vznikající nárazy. Oproti tomu vliv počtu vln po obvodu kola je ve zvoleném rozmezí



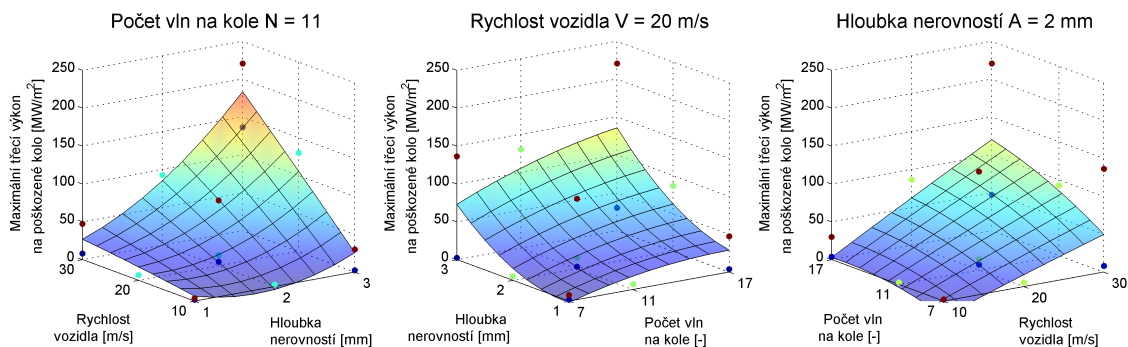
## 5. VÝSLEDKY



Obrázek 5.43: Odezvová plocha maximální normálové síly při dosednutí kola se zvlněním.



Obrázek 5.44: Odezvová plocha maximálního normálového kontaktního tlaku kola se zvlněním.



Obrázek 5.45: Odezvová plocha maximálního třecího výkonu kola se zvlněním.

jen malý, což dokazuje malý rozptyl vypočítaných bodů v grafu vlevo.

Odezvová plocha pro maximální normálový kontaktní tlak (obrázek 5.44) je velmi podobná maximální normálové síle. Oproti tomu odezvová plocha pro třecí výkon (obrázek 5.45) ukazuje, že v případě tečného zatížení a tření roste vliv rychlosti vozidla. Co se týká intenzity, je vliv hloubky opotřebení a rychlosti vozidla ve zvoleném rozmezí parametrů srovnatelný. Rychlost má závislost přibližně lineární, hloubka opotřebení kvadratickou, což souvisí se zlomem při vzniku plošek.

Celkově lze usoudit, že na intenzitu silového působení má největší vliv hloubka nerovností, třecí účinky jsou navíc přes skluz ovlivněny i rychlostí vozidla.

## 5.3. Jízda vozidla po rovné trati se zvlněnými kolejnicemi

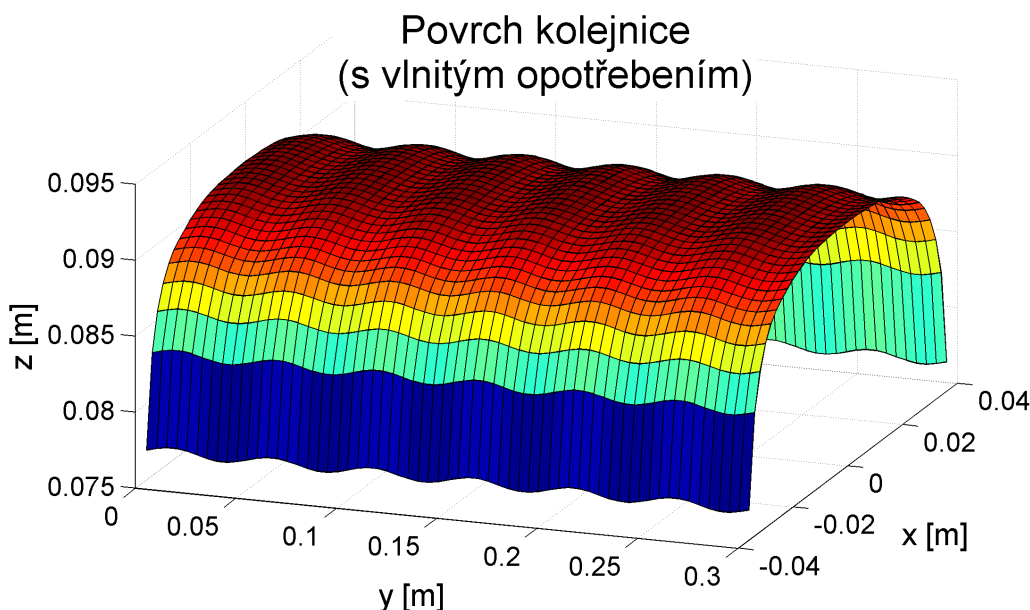
Třetí studie se už nevěnuje nerovnostem na kole, ale zvlnění kolejnic. Dochází k němu obvykle buď na vnitřní kolejnici oblouku (viz obrázek 2.12) nebo na obou kolejnicích na rovné trati, což je možné najít v místech, kde vozidla často zrychlují nebo brzdí, tedy v blízkosti stanic a zastávek.

### 5.3.1. Matematický popis nerovností

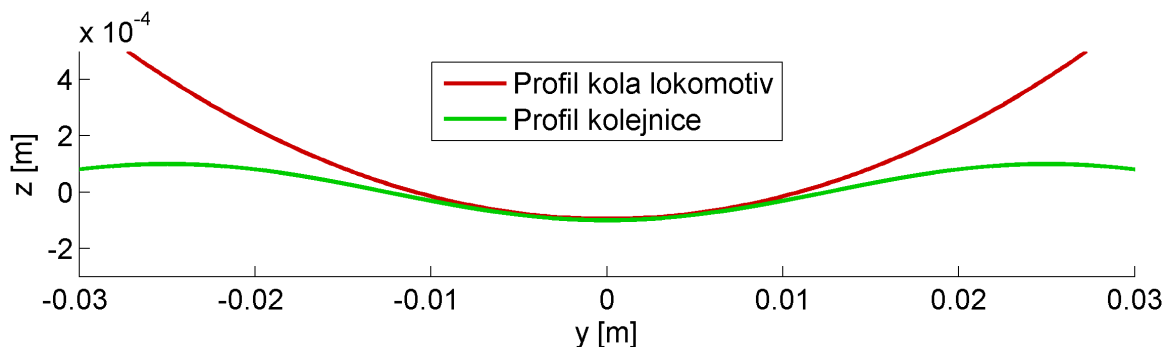
Vlny na kolejnicích je možné v podélném směru popsat jednoduchou harmonickou funkcí

$$N_n = A_w \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{L_w} \cdot y\right) \quad (5.11)$$

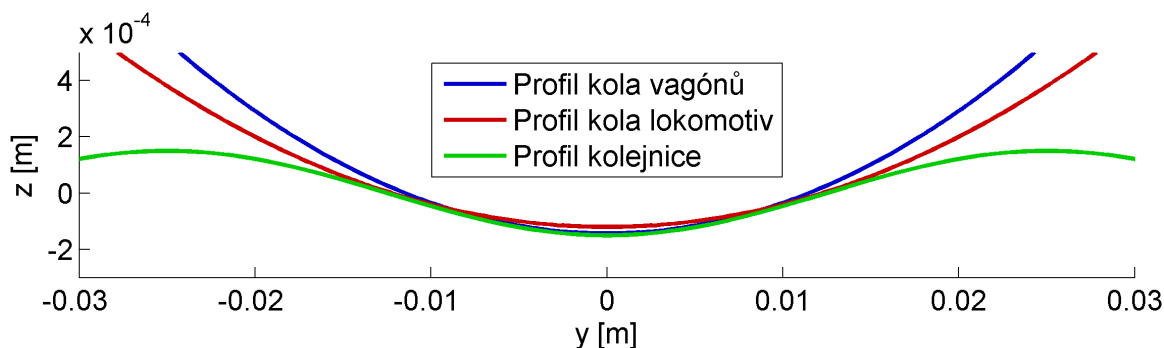
kde  $A_w$  je amplituda nerovností,  $L_w$  je délka nerovností a  $y$  je poloha v podélném směru kolejnic. Takto vzniklé nerovnosti spolu s funkcí profilu UIC60 vytváří zvlnění na obrázku 5.46. Pro zjišťování projevů vozidla při jízdě přes nerovnosti byly zvoleny délky vln 5 cm, 10 cm a 20 cm a amplitudy nerovností 0.05 mm, 0.10 mm a 0.20 mm. Přitom u vln s délkou 5 cm už může být zakřivení sinusoidy srovnatelné se zakřivením kola. Na obrázku 5.47 jsou porovnány nerovnosti s amplitudou 0.1 mm s tvarem zkoumaného kola. V tomto případě tvar kola kopíruje nerovnosti v nehlubším místě. Na obrázku 5.48 jsou nerovnosti ještě výraznější, s amplitudou 0.2 mm. Na tomto obrázku jsou srovnány tvar zvlněné kolejnice s tvarem kola, které se používá pro vagóny, a tvarem kola, které se používá pro lokomotivy. Vagóny mají menší poloměr 460 mm nebo 500 mm, což je méně než v případě lokomotiv (poloměr 625 mm). Proto se teoreticky může stát, že vagóny vytvoří vrtěním nerovnosti, u kterých bude mít kolo lokomotivy kontakt ve dvou místech, jako tomu je na tomto obrázku.



Obrázek 5.46: Harmonická funkce zvlnění kolejnic.



Obrázek 5.47: Srovnání profilů kola a kolejnice pro kolo o poloměru 625 mm a nerovnosti kolejnice o délce vln 5 cm a amplitudě 0.1 mm.



Obrázek 5.48: Srovnání profilů kola a kolejnice pro kola o poloměru 460 mm (vagóny) a 625 mm (lokomotivy) a nerovnosti kolejnice o délce vln 5 cm a amplitudě 0.2 mm.

### 5.3.2. Projevy nerovností v dynamickém chování vozidla

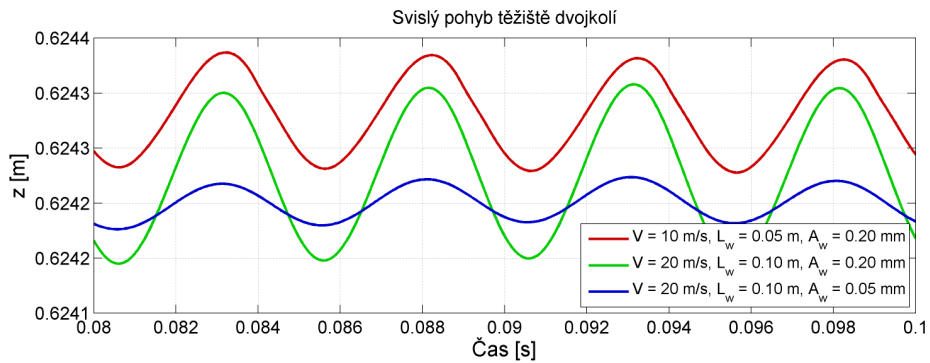
V detailních grafech jsou porovnány dvě série výpočtů. V první jsou srovnány účinky těchto nerovností:

- *Harmonická odezva s malou amplitudou*  
Rychlost vozidla 20 m/s, délka vln 10 cm, amplituda nerovností 0.05 mm. Projevy v případě těchto nerovností mají jen malou odchylku od stavu bez nerovností.
- *Harmonická odezva s velkou amplitudou*  
Rychlost vozidla 20 m/s, délka vln 10 cm, amplituda nerovností 0.2 mm. Projevy v tomto případě stále mají harmonickou odezvu, ale dochází už k výraznému odlehčení kontaktu.
- *Odezva s dvoubodovým kontaktem*  
Rychlost vozidla 10 m/s, délka vln 5 cm, amplituda nerovností 0.2 mm. Protože zůstal poměr rychlosti a délky vln, má odezva v tomto případě stejnou frekvenci. V důsledku dvoubodového kontaktu už lze očekávat složitější odezvu než v předchozích případech.

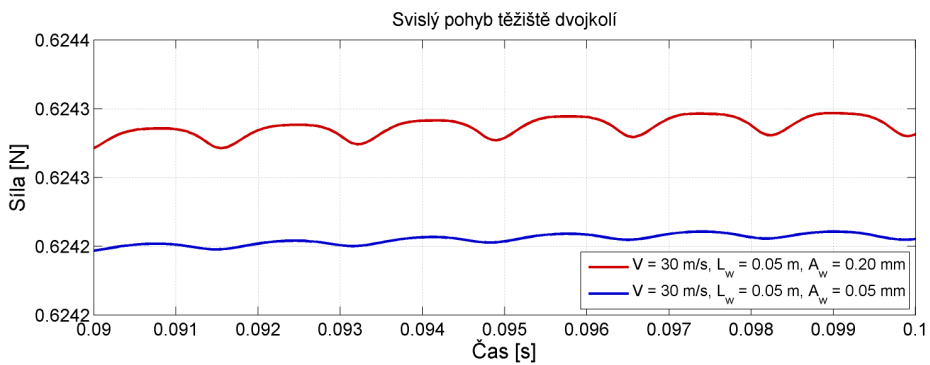
V druhé sérii je porovnávána odezva při nejvyšší rychlosti vozidla:

- *Přejezd krátkých vln s malou amplitudou*  
Rychlost vozidla 30 m/s, délka vln 5 cm, amplituda nerovností 0.05 mm. Kontakt

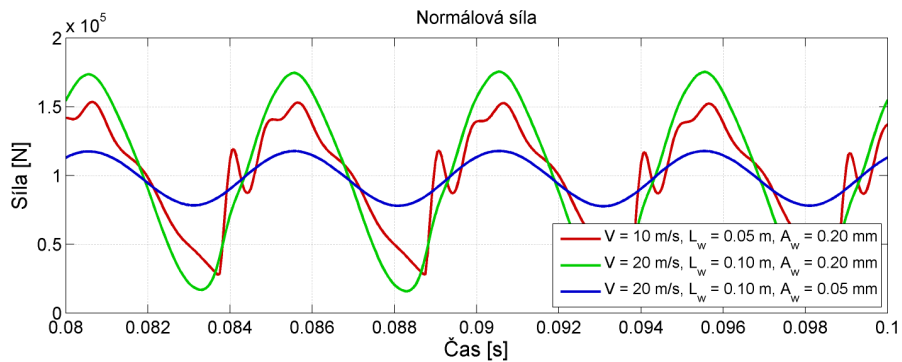
### 5.3. JÍZDA VOZIDLA PO ROVNÉ TRATI SE ZVLNĚNÝMI KOLEJNICEMI



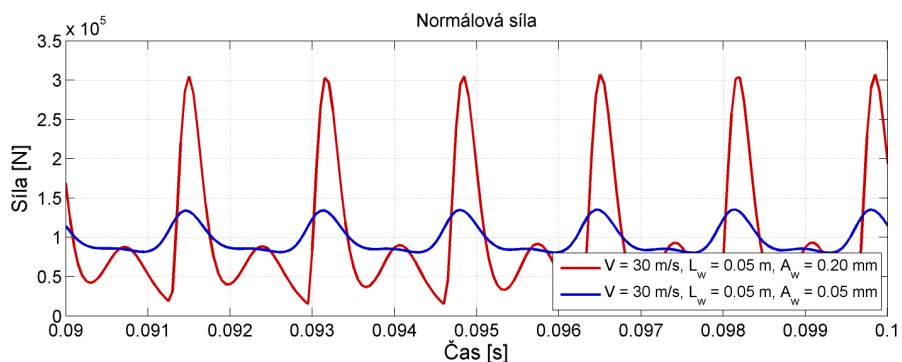
Obrázek 5.49: Svislý pohyb těžiště dvojkolí při zvlnění kolejnic. Projevy bez výrazných rázů.



Obrázek 5.50: Svislý pohyb těžiště dvojkolí při zvlnění kolejnic. Projevy s rázy.

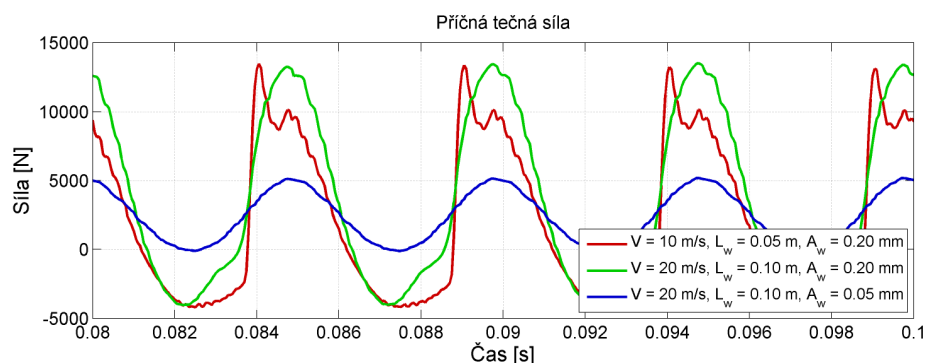


Obrázek 5.51: Normálové síly na kolo při zvlnění kolejnic. Projevy bez výrazných rázů.

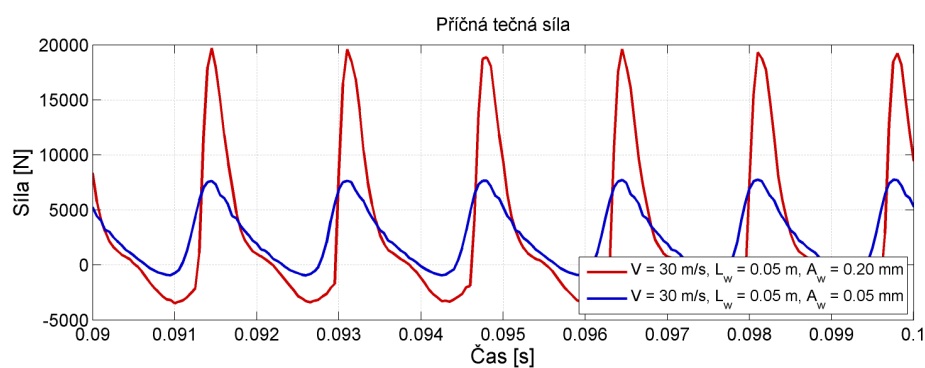


Obrázek 5.52: Normálové síly na kolo při zvlnění kolejnic. Projevy s rázy.

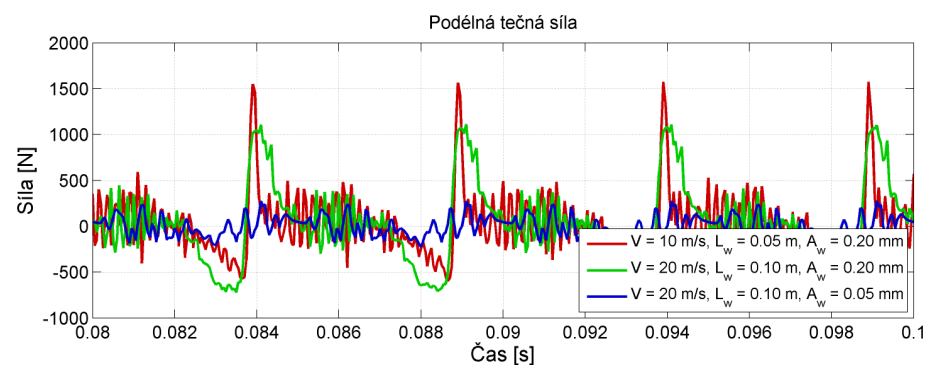
## 5. VÝSLEDKY



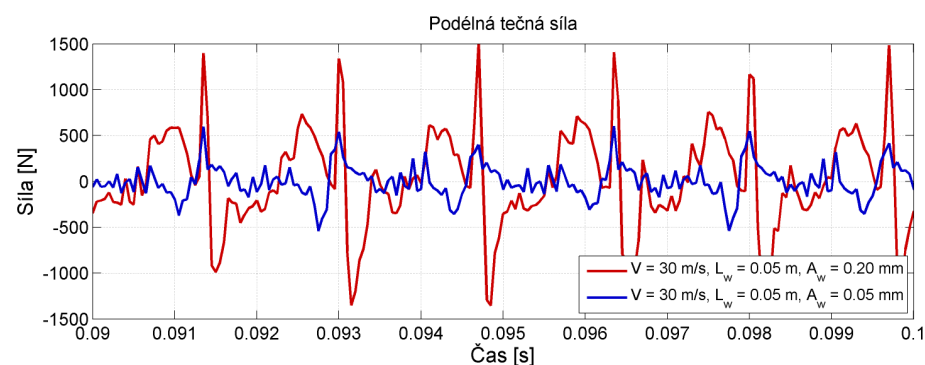
Obrázek 5.53: Příčné tečné síly kolo při zvlnění kolejnic. Projevy bez výrazných rázů.



Obrázek 5.54: Příčné tečné síly kolo při zvlnění kolejnic. Projevy s rázy.



Obrázek 5.55: Podélné tečné síly kolo při zvlnění kolejnic. Projevy bez výrazných rázů.



Obrázek 5.56: Podélné tečné síly kolo při zvlnění kolejnic. Projevy s rázy.

### 5.3. JÍZDA VOZIDLA PO ROVNÉ TRATI SE ZVLNĚNÝMI KOLEJNICEMI

ještě není dvoubodový, ale v nejnižším místě nerovností je poloměr křivosti skoro totožný poloměru kola.

- *Přejezd krátkých vln s velkou amplitudou*

Rychlost vozidla 30 m/s, délka vln 5 cm, amplituda nerovností 0.2 mm. Dvoubodový kontakt s velkou rychlostí přejezdu nerovností.

Na svislém pohybu těžiště dvojkolí (obrázky 5.49 a 5.52) se projevuje nejen rozdílná amplituda nerovností, ale i střední poloha kmitů je rozdílná. Je to způsobeno tím, že kolejnice nejsou uloženy na pevném, ale na pružném podloží. Při pohybu dvojkolí, u kterého dochází k většímu odlehčení, má kolejnice svoji rovnovážnou polohu výše, takže i dvojkolí je pak posazeno výš.

Důležitější hodnotou je normálová síla v kontaktu. Na obrázku 5.51 je srovnání normálové síly v první sérii. Oba průběhy pro rychlost 20 m/s jsou harmonické se střední hodnotou 100 kN. Rozdíl mezi nimi je v amplitudě síly. Při amplitudě nerovností 0.05 mm je amplituda normálové síly 20 kN, při amplitudě nerovností 0.2 mm to činí 80 kN. Je zde tedy lineární závislost. Při dostatečně velké délce vln nerovností tedy nedochází k nelineárním projevům normálové síly.

To se ovšem změní při zkrácení vln nerovností na 5 cm. Při rychlosti 10 m/s je frekvence nerovností stejná jako v předchozích dvou případech. Průběh normálové síly je ale v tomto případě mnohem složitější právě kvůli tomu, že se objevuje dvoubodový kontakt. Kontaktní plocha tak nekopíruje plynule povrch kolejnice, ale přeskakuje z jednoho vrcholku nerovností na druhý. Tyto přechody jsou provázeny odchylkami od harmonického průběhu normálové síly.

Na obrázku 5.52 je pozorovatelný vliv amplitudy nerovností s délkou vln 5 cm. U menších nerovností, s amplitudou 0.05 mm, kdy se křivost nerovností blíží poloměru kola, nedochází k výraznému zvýšení normálových sil. Průběh už však nepřipomíná harmonickou funkci. V minimu nedochází k výraznému odlehčení, jen při dojezdu k vrcholu nerovností dostane kolo impuls síly. U nerovností s amplitudou 0.2 mm už k dvoubodovému kontaktu dochází. Po předání kontaktu z jednoho vrcholu nerovností na druhý dochází k jistému nárazu (maximum normálové síly 300 kN). Druhá, menší špička odpovídá přejezdu přes vrchol nerovností.

Tečné, resp. třecí síly se projevují zejména v příčném směru (obrázky 5.53 a 5.54), kde jsou až o řád vyšší než ve směru podélném. U tečných sil jsou patrné odchylky od harmonické odezvy. Ta zůstává jen v příčném směru v případě nejmenších nerovností. Maxima příčných tečných sil odpovídají maximům normálových sil, což dokládá přímou vazbu normálových a příčných tečných sil.

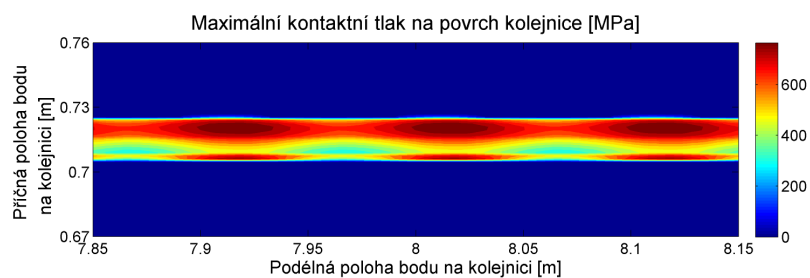
V případě podélných tečných sil (obrázky 5.55 a 5.56) jsou výsledky silně postiženy šumem. A to protože hraničněprvková síť je poměrně hrubá nenulový skluz jen na některých prvcích. Maximální hodnoty podélných tečných sil jsou řádově nižší než u normálové nebo tečné síly, protože se jedná o prosté odvalování bez přenosu hnacích sil.

#### 5.3.3. Projevy nerovností na kontaktních plochách

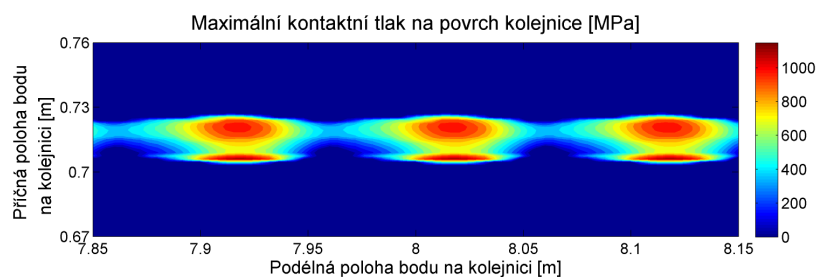
Na obrázcích 5.57 až 5.60 jsou projevy na povrchu kolejnice pro stejné varianty výpočtů jako v předchozí kapitole.

Rozložení maximálního normálového tlaku na kolejnici při přejezdu vozidla je na obrázku 5.57. Podobně jako v grafu normálových sil (5.51) jsou na odezvách

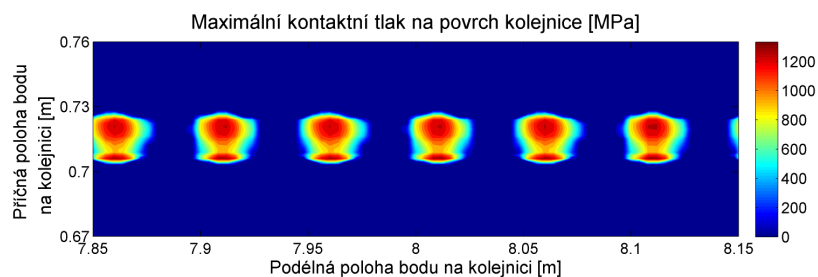
## 5. VÝSLEDKY



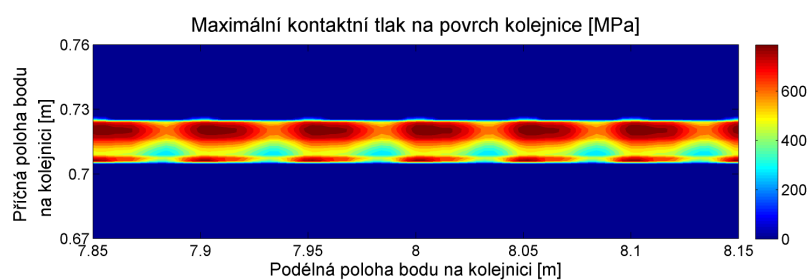
(a) Rychlost 20 m/s, délka nerovností 0.10 m, amplituda nerovností 0.05 mm



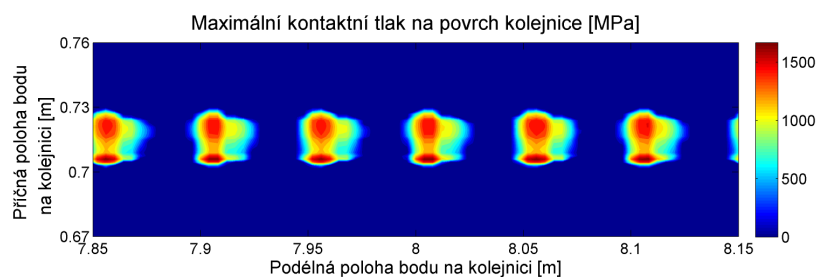
(b) Rychlost 20 m/s, délka nerovností 0.10 m, amplituda nerovností 0.20 mm



(c) Rychlost 10 m/s, délka nerovností 0.05 m, amplituda nerovností 0.20 mm



(d) Rychlost 30 m/s, délka nerovností 0.05 m, amplituda nerovností 0.05 mm



(e) Rychlost 30 m/s, délka nerovností 0.05 m, amplituda nerovností 0.20 mm

Obrázek 5.57: Rozložení maximálního normálového kontaktního tlaku na zvlněné kolejnici v průběhu průjezdu kola. Poměr měřítka os X a Y 1:1.



### 5.3. JÍZDA VOZIDLA PO ROVNÉ TRATI SE ZVLNĚNÝMI KOLEJNICEMI



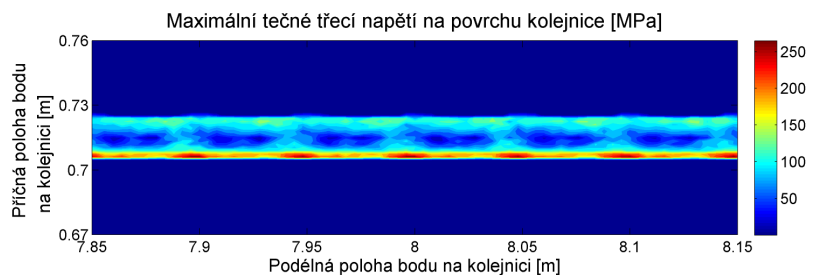
(a) Rychlost 20 m/s, délka nerovností 0.10 m, amplituda nerovností 0.05 mm



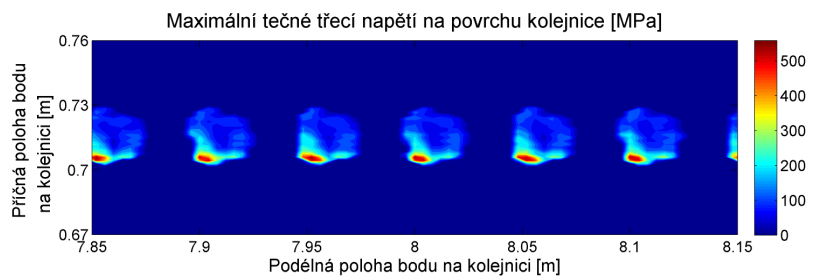
(b) Rychlost 20 m/s, délka nerovností 0.10 m, amplituda nerovností 0.20 mm



(c) Rychlost 10 m/s, délka nerovností 0.05 m, amplituda nerovností 0.20 mm



(d) Rychlost 30 m/s, délka nerovností 0.05 m, amplituda nerovností 0.05 mm



(e) Rychlost 30 m/s, délka nerovností 0.05 m, amplituda nerovností 0.20 mm

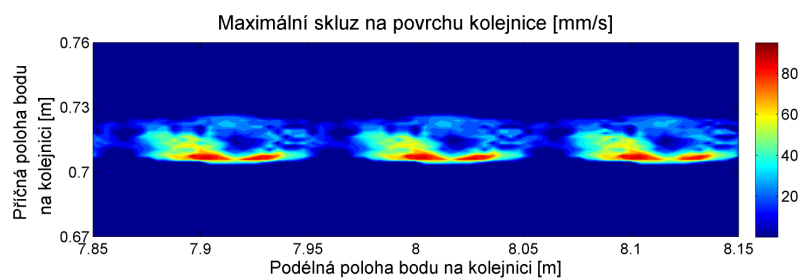
Obrázek 5.58: Rozložení maximálního tečného třecího napětí na zvlněné kolejnici v průběhu průjezdu kola. Poměr měřítka os X a Y 1:1.



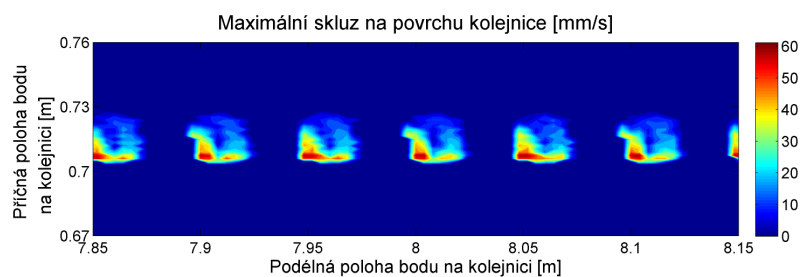
## 5. VÝSLEDKY



(a) Rychlost 20 m/s, délka nerovností 0.10 m, amplituda nerovností 0.05 mm



(b) Rychlost 20 m/s, délka nerovností 0.10 m, amplituda nerovností 0.20 mm



(c) Rychlost 10 m/s, délka nerovností 0.05 m, amplituda nerovností 0.20 mm



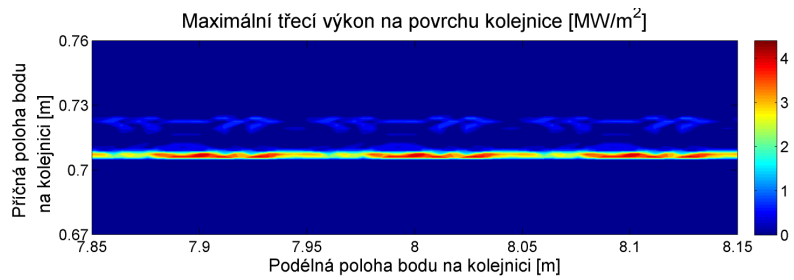
(d) Rychlost 30 m/s, délka nerovností 0.05 m, amplituda nerovností 0.05 mm



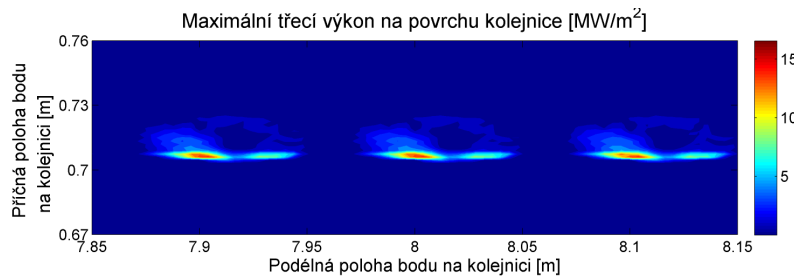
(e) Rychlost 30 m/s, délka nerovností 0.05 m, amplituda nerovností 0.20 mm

Obrázek 5.59: Rozložení maximálního skluzu na zvlněné kolejnici v průběhu průjezdu kola.  
Poměr měřítka os X a Y 1:1.

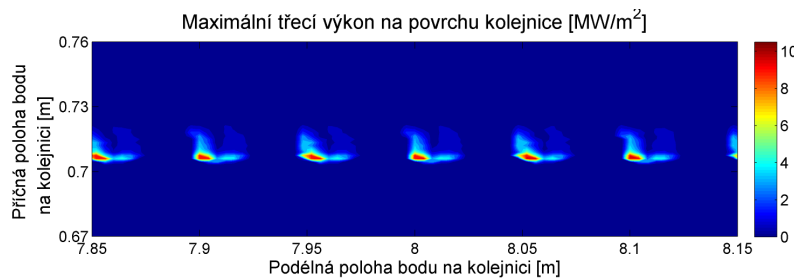
### 5.3. JÍZDA VOZIDLA PO ROVNÉ TRATI SE ZVLNĚNÝMI KOLEJNICEMI



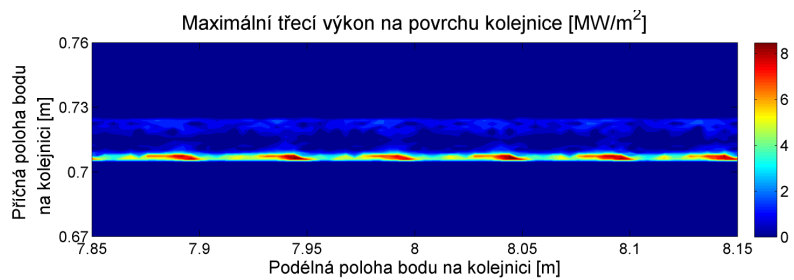
(a) Rychlost 20 m/s, délka nerovností 0.10 m, amplituda nerovností 0.05 mm



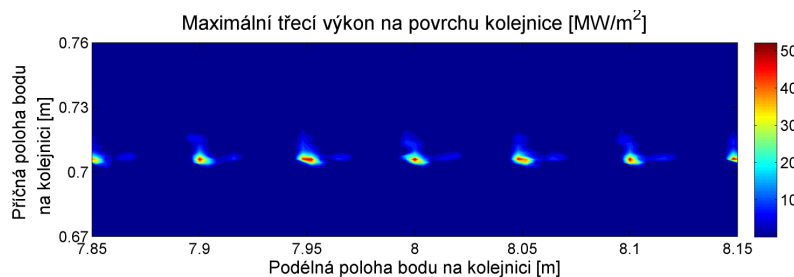
(b) Rychlost 20 m/s, délka nerovností 0.10 m, amplituda nerovností 0.20 mm



(c) Rychlost 10 m/s, délka nerovností 0.05 m, amplituda nerovností 0.20 mm



(d) Rychlost 30 m/s, délka nerovností 0.05 m, amplituda nerovností 0.05 mm



(e) Rychlost 30 m/s, délka nerovností 0.05 m, amplituda nerovností 0.20 mm

Obrázek 5.60: Rozložení maximálního třecího výkonu na zvlněné kolejnici v průběhu průjezdu kola. Poměr měřítka os X a Y 1:1.

s nejmírnějšími nerovnostmi (obrázek 5.57(a)) patrné jen malé výkyvy normálového tlaku. Na následujícím obrázku (5.57(b)) už jsou vidět výrazná odlehčení v prostoru prohlubní, které se projevuje snížením maximálního normálového tlaku až na asi 300 MPa. Je to patrné na kolejnici v podélných polohách např. 7.97 m a 8.07 m.

U nerovností s délkou vln 5 cm a amplitudou 0.2 mm, kde dochází k dvoubodovému kontaktu (obrázky 5.57(c) a 5.57(e)), lze pozorovat, že v prohlubních zvlnění už není přenášen žádný kontaktní tlak. Zároveň lze na obrázku 5.57(e) pozorovat tvrdé dosednutí kola po přejezdu prohlubně (na polohách 7.91 m, 7.96 m, 8.01 m, ...), které odpovídá 300 kN maximum na průběhu normálové síly. Následné zatížení už není tak výrazné (žluté maximum o kousek dále) a je srovnatelné s pomalejším průjezdem na obrázku 5.57(c) (pozor na rozdílné měřítko).

Poslední, co stojí za zmínku u normálového tlaku, je maximální zatížení při odlehčení kola vozidla, které rychlostí 30 m/s přejíždí nerovnosti s délkou vln 5 cm a amplitudou 0.05 mm, na obrázku 5.57(d). Vzhledem k průběhu normálové síly by se dalo čekat, že toto zatížení bude stejné nebo větší než v případě 5.57(a). A to proto, že minimum normálové síly je také větší - 78 kN pro rychlost 20 m/s, délku vln 10 cm, amplitudu 0.05 mm (5.57(a)), 81 kN pro rychlost 30 m/s, délku vln 5 cm, amplitudu 0.05 mm (5.57(d)). Maximální normálový tlak v kontaktu je ale 650 MPa pro první variantu a jen 600 MPa pro druhou. To je způsobeno tím, že normálový tlak je u nerovností s délkou vln 5 cm rozložen na větší plochu v důsledku podobné křivosti nerovností a kola.

V případě tečných projevů, ať už se jedná o maximální tečné třecí napětí (obrázek 5.58), skluz (obrázek 5.59) nebo třecí výkon (obrázek 5.60) už jsou výsledky postiženy šumem, který byl pozorován v průběhu podélných tečných sil (obrázky 5.55 a 5.56). Ale i tak lze usoudit některé závěry:

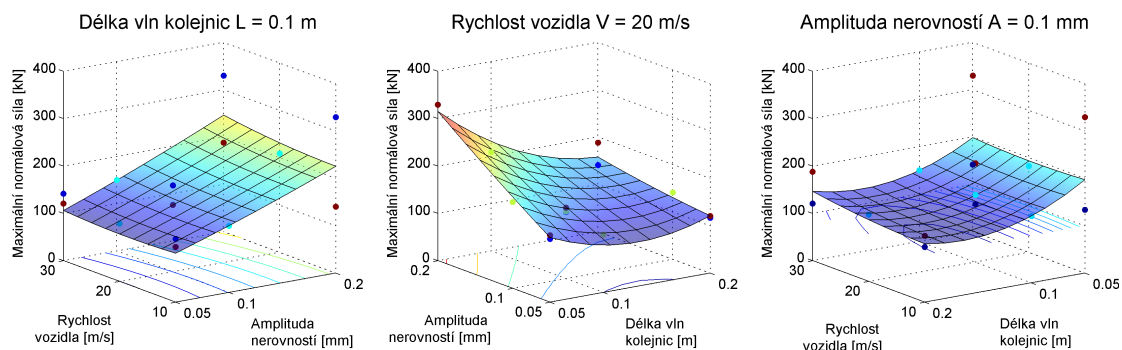
- Maxima tečných projevů (včetně skluzu) se shodují s maximy normálových tlaků, tedy dosednutí kola.
- Skluz, a tedy i třecí výkon, jsou větší blíže k okolku kola nebo vnitřní hraně kolejnice. Zvýšené opotřebení lze tedy očekávat směrem k okolku. Toto je zvláště patrné, pokud nedochází k výrazným dynamickým jevům - maximum všech tečných projevů je blíže k vnitřní hraně (na obrázcích dole).
- Nejnižší zatížení je oproti tomu na styčné kružnici, kde je nejlepší vedení kola.
- Pokud se vyskytnou rázy nebo jakékoli projevy, které se jim blíží, řádově vzroste třecí výkon na kontaktní ploše.

#### 5.3.4. Vliv jednotlivých parametrů nerovností

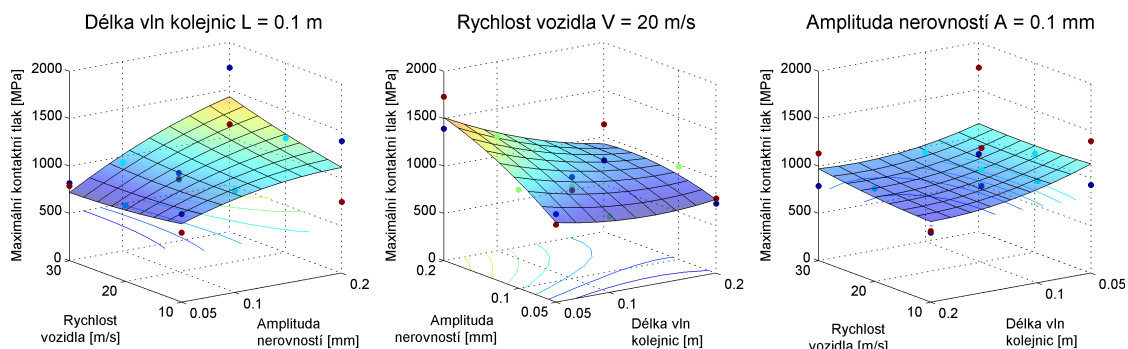
Pro porovnání účinků parametrů zvlnění byl naplánován experiment, při kterém byly zvoleny rychlosti vozidla 10 m/s, 20 m/s a 30 m/s, amplitudy nerovností 0.05 mm, 0.1 mm a 0.2 mm a délky vln nerovností 5 cm, 10 cm a 20 cm. Již ukázané výsledky byly ostatně vybrány z této série.

Podle výsledků pro normálovou sílu (obrázek 5.61) má na maximální normálovou sílu největší účinek amplituda nerovností. Rychlost vozidla má naopak podle této studie vliv zanedbatelný. Lze tedy usuzovat, že změna rychlosti vozidla pouze ovlivní frekvenci normálové síly, ale ne její velikost. V případě délky vln nerovností je na rozdíl od

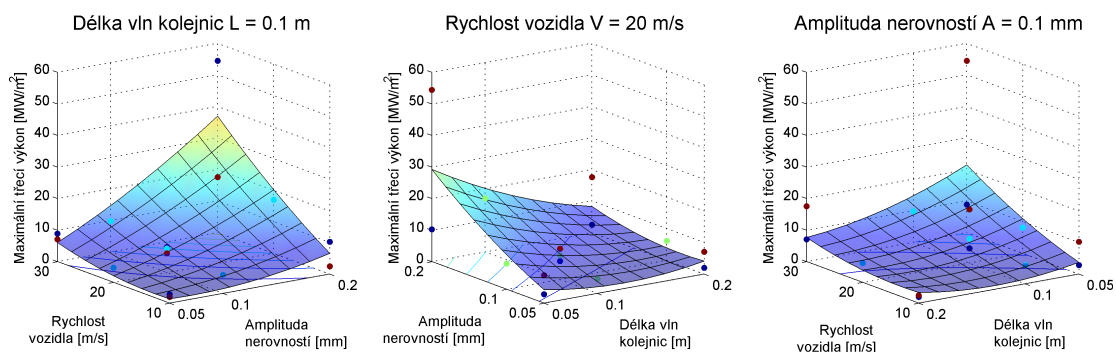
### 5.3. JÍZDA VOZIDLA PO ROVNÉ TRATI SE ZVLNĚNÝMI KOLEJNICEMI



Obrázek 5.61: Odezvová plocha maximální normálové síly na kolejnici se zvlněním.



Obrázek 5.62: Odezvová plocha maximálního normálového kontaktního tlaku na kolejnici se zvlněním.



Obrázek 5.63: Odezvová plocha maximálního třecího výkonu na kolejnici se zvlněním.

ostatních úměra nepřímá - čím kratší vlny, tím dynamičtější odezva. Obdobné závěry je možné nalézt i pro maximální normálový kontaktní tlak (obrázek 5.62).

Kde se však rychlost vozidla projevuje, je maximální třecí výkon (obrázek 5.63). Obzvláště, pokud se začnou objevovat projevy blížící se nárazům, roste řádově (např. u rychlosti 30 m/s, délce vln 5 cm, amplitudě zvlnění 0.2 mm, viz předchozí části). Souvisí to s tím, že při vyšších rychlostech vozidla roste i relativní skluz kol a tím jak skutečný skluz, tak třecí výkon. Ale stále má výraznější vliv amplituda nerovností. Délka vln má účinek nižší.

## 5.4. Jízda vozidla v oblouku

Předchozí části se věnovaly chování v kontaktu v případech, kdy už vzniklo na kolech nebo na kolejnicích nějaké opotřebení nebo poškození. Následující část se bude věnovat spíše příčinám vzniku opotřebení. Na kolejnicích je nejčastěji opotřebení pozorováno v oblouku, a to zvlnění vnitřní kolejnice a změna profilu vnější kolejnice (viz obrázek 2.14). Toto opotřebení vzniká nerovnoměrným pohybem dvojkolí při jízdě v oblouku, kdy kolo na vnitřní kolejnici musí projet kratší dráhu než to na vnější kolejnici. To vyvolává kmitavý pohyb, jež vytváří toto opotřebení. Jak je tento pohyb ovlivněn rychlostí vozidla nebo poloměrem oblouku, bude ukázáno níže.

### 5.4.1. Matematický popis tratě

Trať v oblouku je popsána na jiné úrovni modelu než nerovnosti v předchozích kapitolách, a to v popisu trajektorie tratě. Oblouk je popsán dvěma parametry - poloměrem oblouku  $R$  a převýšením vnější kolejnice  $p_v$ , viz rovnice 2.5. Převýšení vnější kolejnice je pro účely výpočtu přeměněno na úhel odklonu kolejnice  $\gamma_{dr}$  použitý v rovnici 4.45. Hodnoty použité ve výpočtech jsou v tabulce 5.2. Odpovídají oblouku navrženému pro rychlost 20 m/s (72 km/h).

POLOMĚR OBLOUKU [m]	ODKLON KOLEJNICE [°]
300	4.676
600	2.342
1000	1.406

Tabulka 5.2: Přehled použitých parametrů oblouku.

Profil kol je S1002, profil kolejnic UIC60, žádné nerovnosti nebyly uvažovány. Chování vozidla je tedy ovlivněno pouze zakřivením tratě.

### 5.4.2. Detail chování v kontaktu

V první studii jízdy chování oblouku byl simulován průjezd vozidla jedoucího rychlostí 20 m/s obloukem o poloměru 300 m, který odbočuje doleva. Na podobném oblouku na úseku trati Brno - Bílovice nad Svitavou bylo nalezeno výrazné opotřebení, viz obrázek 2.14.

Na obrázcích 5.64 až 5.67 je detail zatížení kolejnic při průjezdu obloukem. Obrázky ukazují projevy vyhodnocované na povrchu kolejnice v kontaktu pro úsek dlouhý 1 m, vždy zvlášť účinek při průjezdu předního a zadního dvojkolí podvozku. Projevy dvojkolí na předním a zadním podvozku byly podobné, proto se nerozlišují. Na každém obrázku jsou nahoře průběhy zatížení pro obě kolejnice při průjezdu předního dvojkolí podvozku, dole totéž pro zadní dvojkolí podvozku. Dále platí, že nahoře je zobrazena levá kolejnice, dole pravá kolejnice a směr jízdy je zleva doprava. Vnitřní hrany kolejnic zůstávají uprostřed.

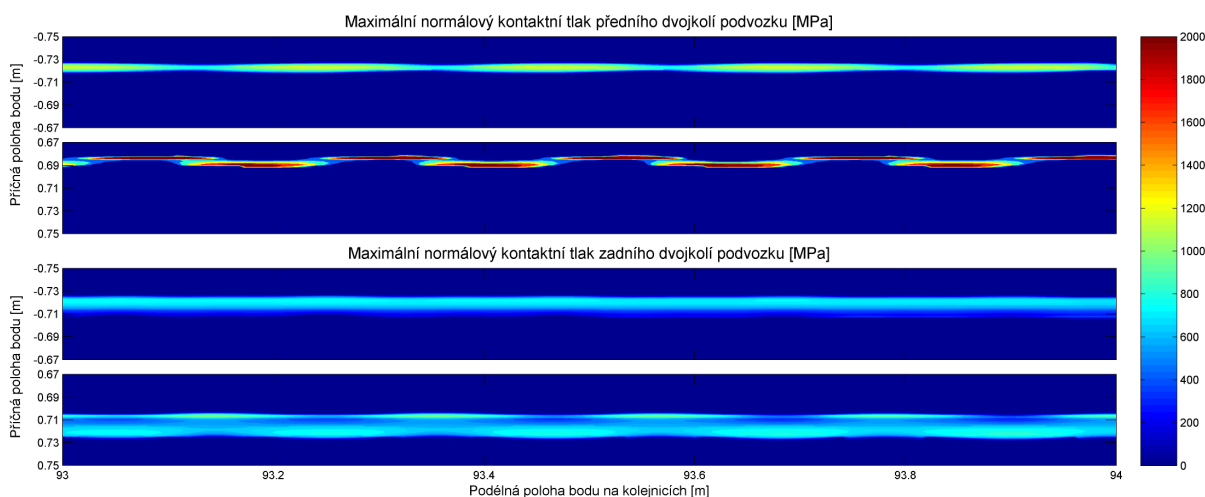
Na všech obrázcích je patrné výrazně vyšší zatížení na vnitřní hraně pravé kolejnice vyvolané předním dvojkolím. To je způsobeno tím, jak má přední dvojkolí setrvačností a tvarem profilu kola snahu jet rovně a pravá kolejnice ho musí tlačit doleva do směru jízdy. Proto vzniká vyšší zatížení na vnitřní hraně pravé kolejnice a u okolku pravého kola.

#### 5.4. JÍZDA VOZIDLA V OBLOUKU

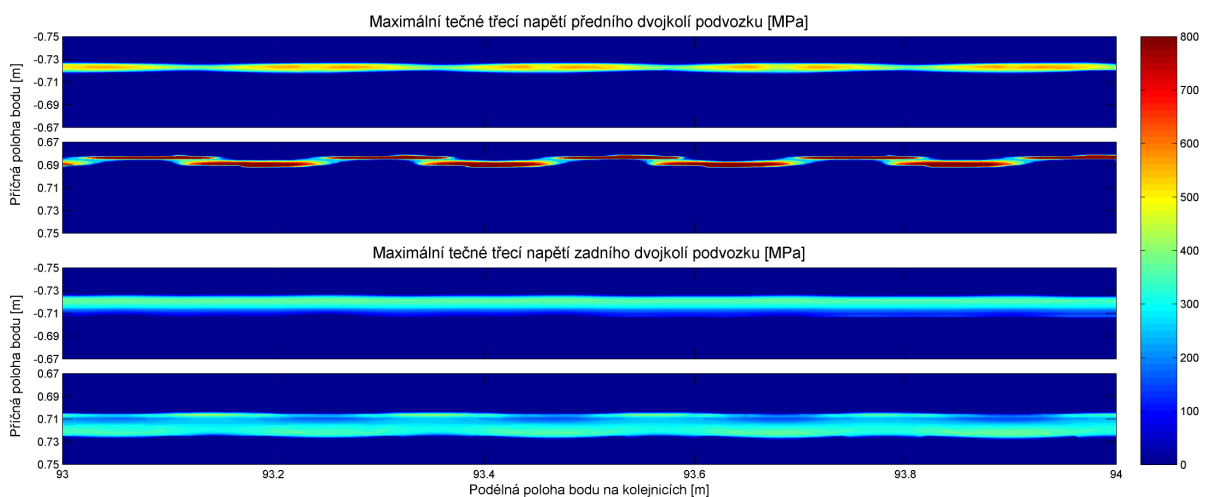
Na hraně kolejnice je mnohem menší poloměr zakřivení povrchu, proto je zde i několika-násobně vyšší maximální kontaktní tlak. Tyto projevy souhlasí s výrazným opotřebením profilu na vnější kolejnici oblouku (obrázek 2.11).

Kvůli rozdílnému poloměru levé a pravé kolejnice oblouku nejede dvojkolí plynule, ale kmitá. Pokud kola na obou kolejnicích přesně kopírují kolejnice, pravé kolo (uvnitř oblouku) předbíhá levé (vně oblouku). Protože se kola točí se stejnou úhlovou rychlostí, roste na vnitřním kole skluz a tečná síla a začne ho zpomalovat, aby se pohyb ustálil. Když tečná síla zpomalí vnitřní kolo dostatečně, skluz se zmenší a kolo se znovu odvaluje a opět předjíždí vnější kolo. Postupné zvětšování a zmenšování skluzu je nejlépe patrné na obrázku 5.66 nahoře, kde levé kolo zvyšuje skluz až trojnásobně oproti běžné hodnotě. Toto kmitání je příčinou tvorby zvlnění na vnitřní kolejnici oblouku (viz obrázek 2.12). Protože ale na vnitřní kolejnici nejsou tak velké kontaktní tlaky jako na vnější, není ani její opotřebenění tak výrazné jako u změn profilu vnější kolejnice.

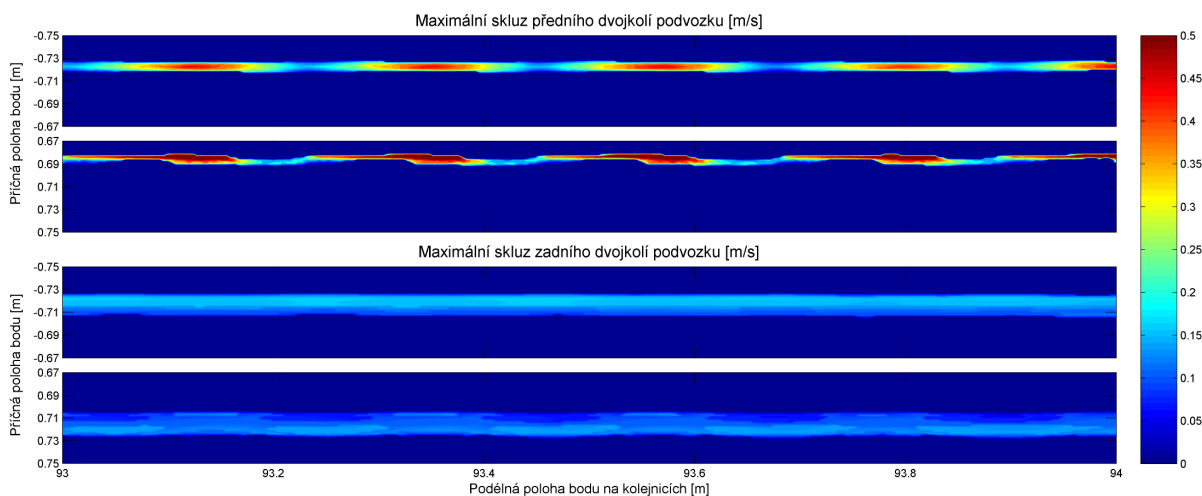
Na vnější kolejnici se kmitání dvojkolí projevuje i změnou polohy kontaktní plochy, protože na vnitřní hraně kolejnice jsou tvar a poloha kontaktní plochy citlivé i na malé změny vzájemné polohy povrchů kola a kolejnice.



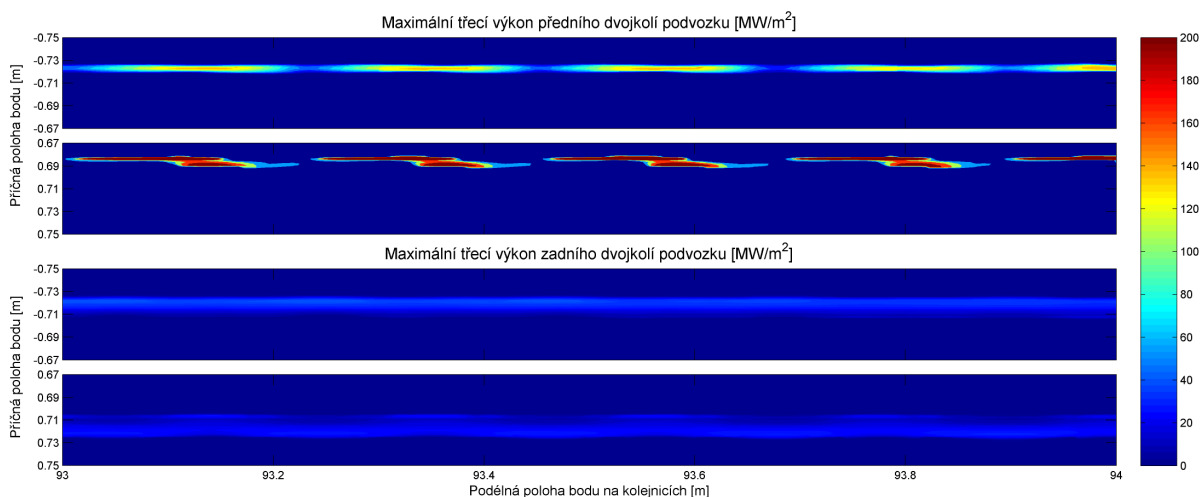
Obrázek 5.64: Detail rozložení maximálního normálového kontaktního tlaku při průjezdu obloukem.



Obrázek 5.65: Detail rozložení maximálního tečného třecího napětí při průjezdu obloukem.



Obrázek 5.66: Detail rozložení maximálního skluzu při průjezdu obloukem.



Obrázek 5.67: Detail rozložení maximálního třecího výkonu při průjezdu obloukem.

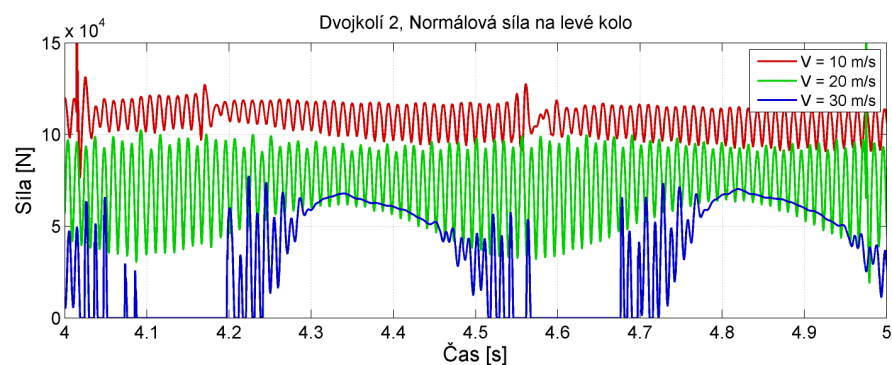
Zadní dvojkolí podvozku je vedeno pohybem předního dvojkolí, proto projevy v kontaktu nejsou zdaleka tak výrazné. Kontaktní plocha se už neposouvá tak výrazně z vystředěné polohy a všechny projevy mají nižší hodnotu, i když ke kmitání dvojkolí stále dochází. Očekávané opotřebení zadního dvojkolí je mnohem menší než v případě předního dvojkolí podvozku.

### 5.4.3. Vliv rychlosti vozidla

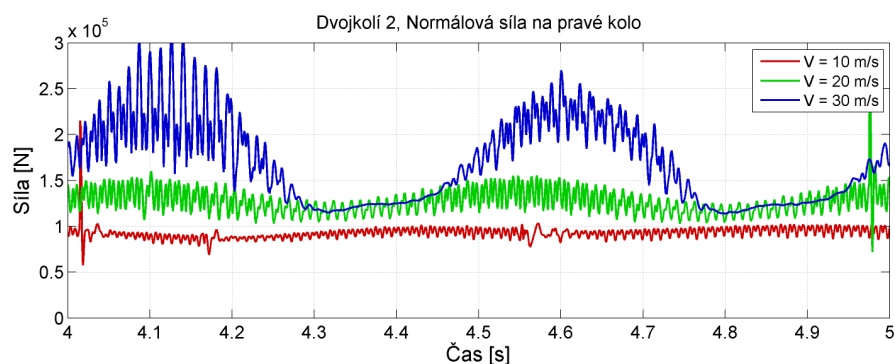
Pro zkoumání vlivu rychlosti vozidla na projevy v kontaktech kol a kolejnic byly simulovány průjezdy vozidla obloukem o poloměru 300 m při rychlosti 10 m/s (36 km/h), 20 m/s (72 km/h) a 30 m/s (108 km/h). Byly porovnávány tři hlavní série parametrů. První byly síly v kontaktu (obrázky 5.68 až 5.70), dále frekvence vybuzení na dvojkolí v jednotlivých stupních volnosti pohybu (obrázek 5.71) a nakonec projevy v kontaktu kola a kolejnice (obrázky 5.72 až 5.79).

V průběhu normálové síly (obrázek 5.68) je vidět, že s rostoucí rychlostí vozidla roste i dynamičnost silového působení. Zatímco při rychlosti 10 m/s je normálová síla jen mírně rozkmitaná, v případě rychlosti 20 m/s kmitá přední dvojkolí už výrazně. V případě průjezdu rychlostí 30 m/s už dochází dokonce ke ztrátě kontaktu.

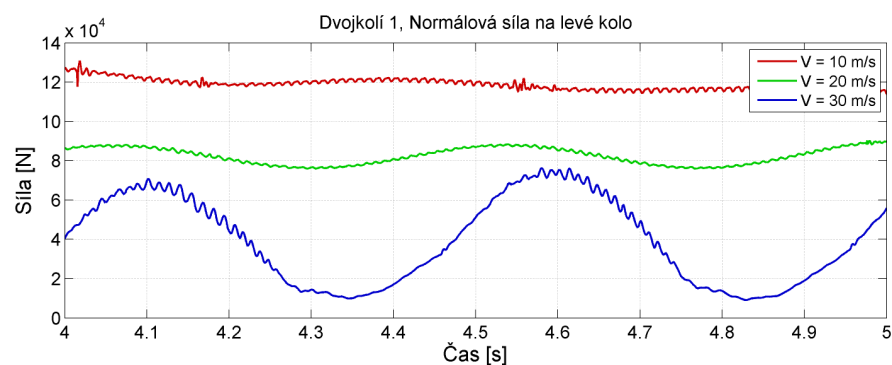
#### 5.4. JÍZDA VOZIDLA V OBLOUKU



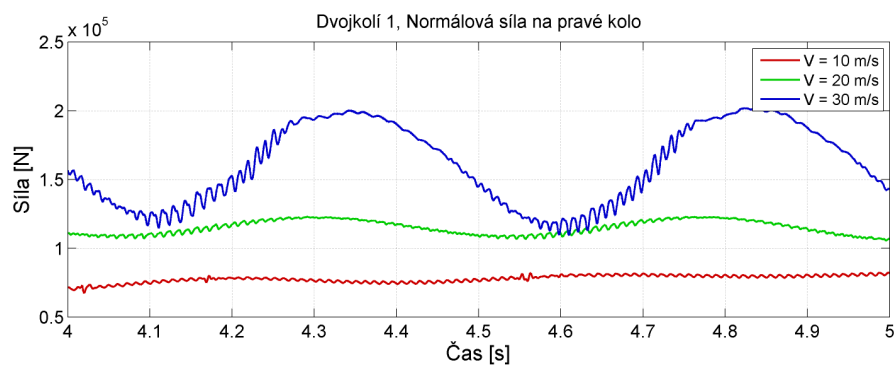
(a) Levé kolo předního dvojkolí podvozku



(b) Pravé kolo předního dvojkolí podvozku



(c) Levé kolo zadního dvojkolí podvozku

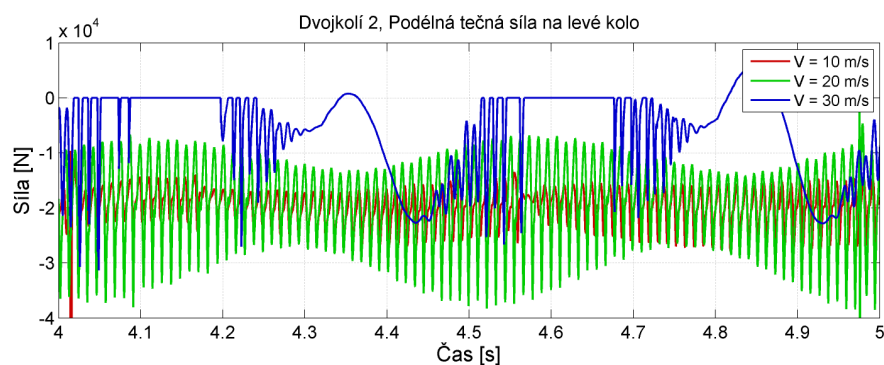


(d) Pravé kolo zadního dvojkolí podvozku

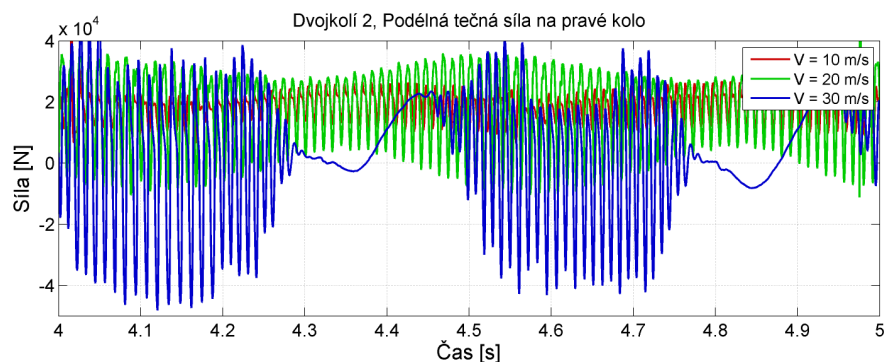
Obrázek 5.68: Vliv rychlosti vozidla na průběh normálové síly při průjezdu obloukem o poloměru 300 m.



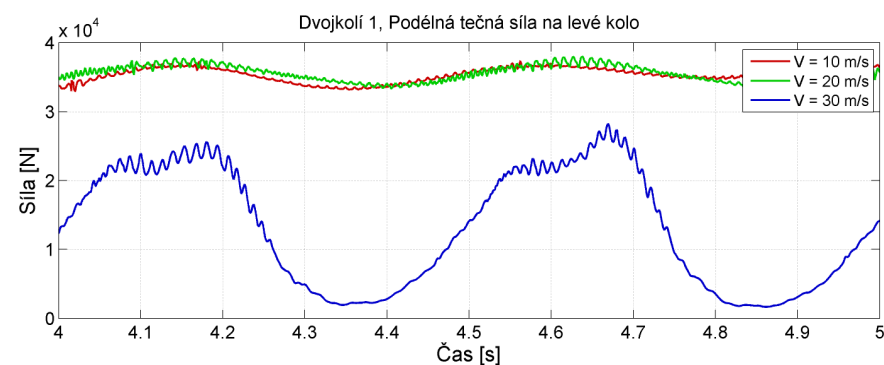
## 5. VÝSLEDKY



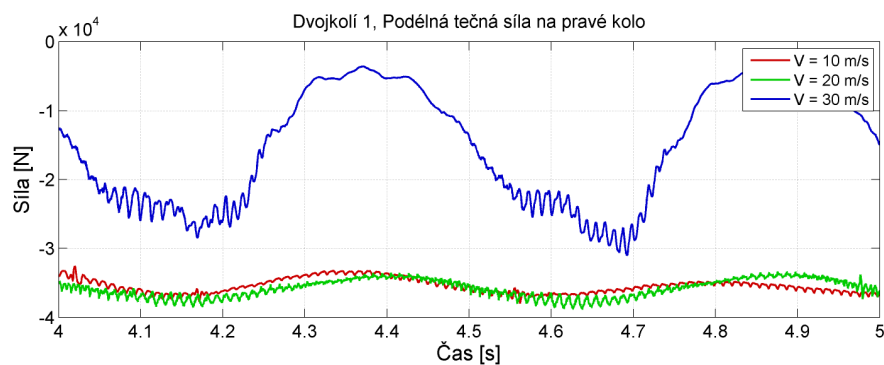
(a) Levé kolo předního dvojkolí podvozku



(b) Pravé kolo předního dvojkolí podvozku



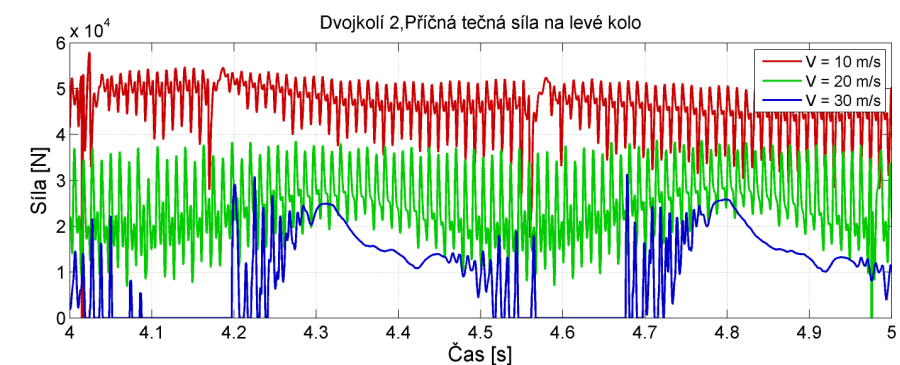
(c) Levé kolo zadního dvojkolí podvozku



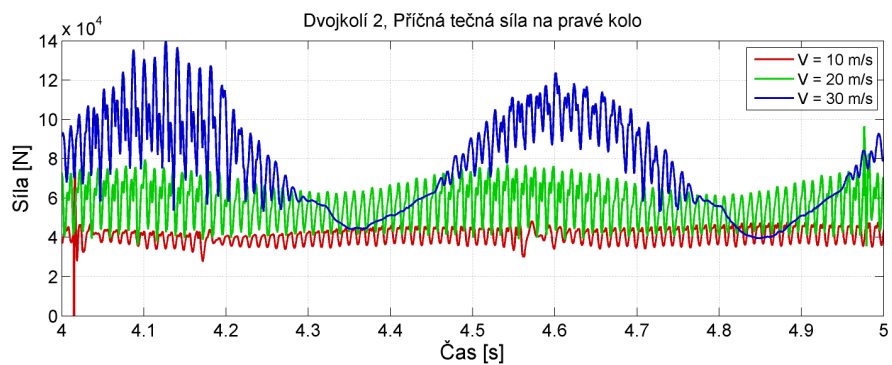
(d) Pravé kolo zadního dvojkolí podvozku

Obrázek 5.69: Vliv rychlosti vozidla na průběh podélné tečné síly při průjezdu obloukem o poloměru 300 m.

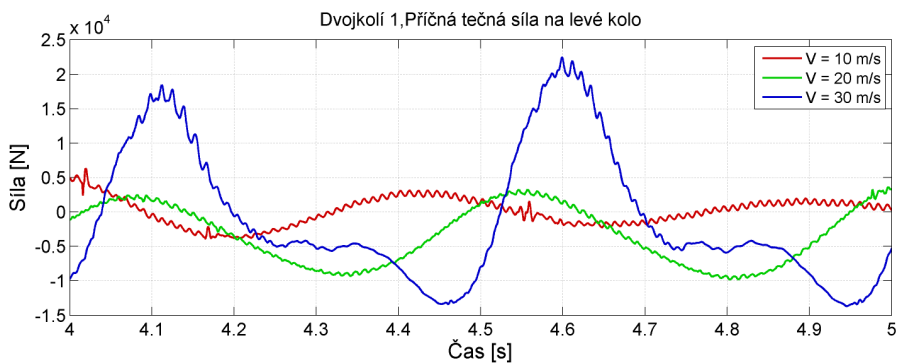
#### 5.4. JÍZDA VOZIDLA V OBLOUKU



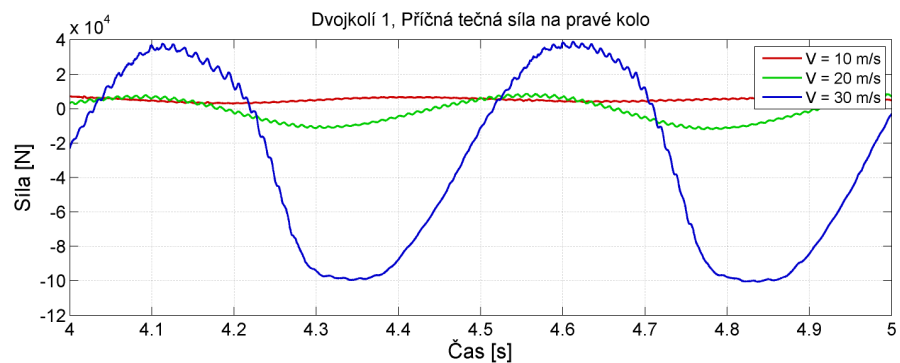
(a) Levé kolo předního dvojkolí podvozku



(b) Pravé kolo předního dvojkolí podvozku



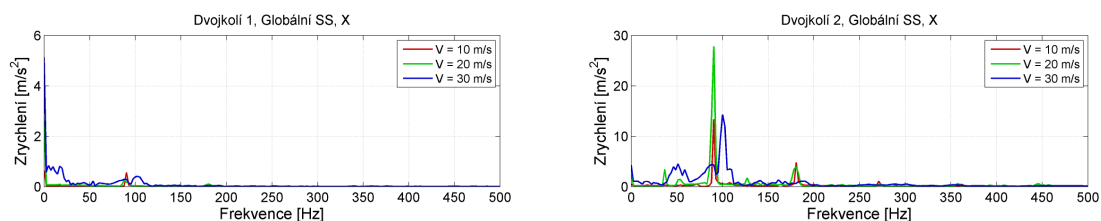
(c) Levé kolo zadního dvojkolí podvozku



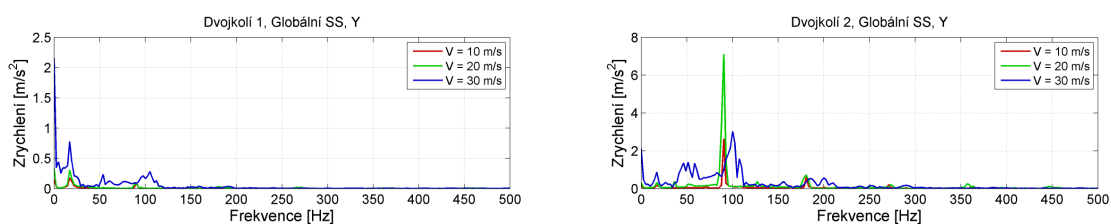
(d) Pravé kolo zadního dvojkolí podvozku

Obrázek 5.70: Vliv rychlosti vozidla na průběh příčné tečné síly při průjezdu obloukem o poloměru 300 m.

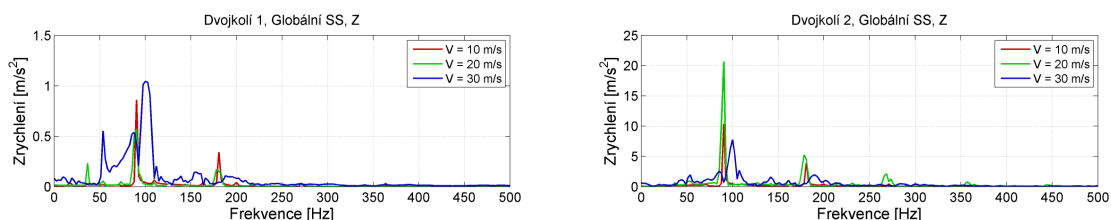
## 5. VÝSLEDKY



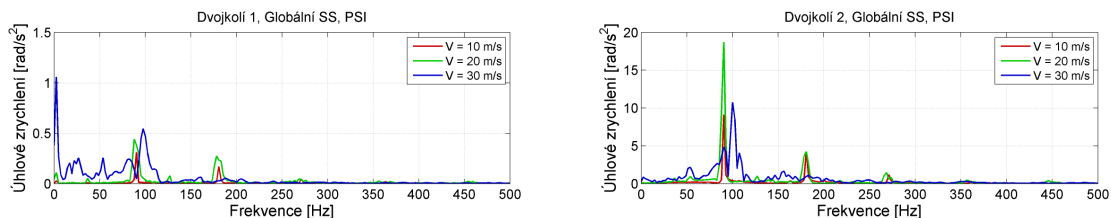
(a) Příčné zrychlení těžiště dvojkolí ( $\ddot{x}$ )



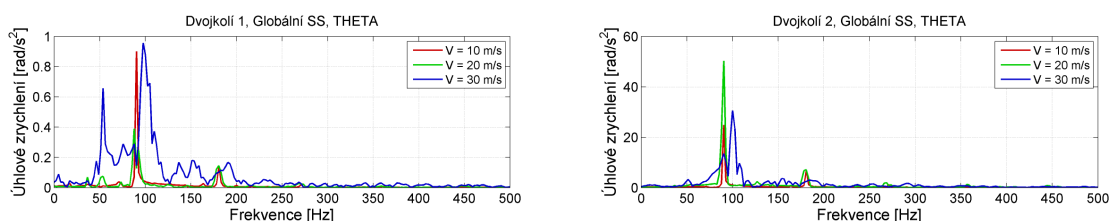
(b) Podélné zrychlení těžiště dvojkolí ( $\ddot{y}$ )



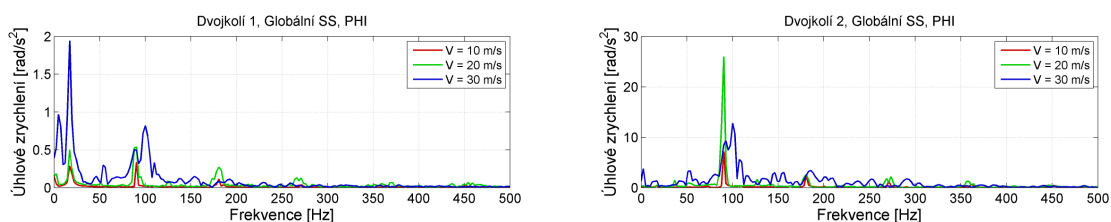
(c) Svislé zrychlení těžiště dvojkolí ( $\ddot{z}$ )



(d) Úhlové zrychlení bočení dvojkolí ( $\ddot{\psi}$ )



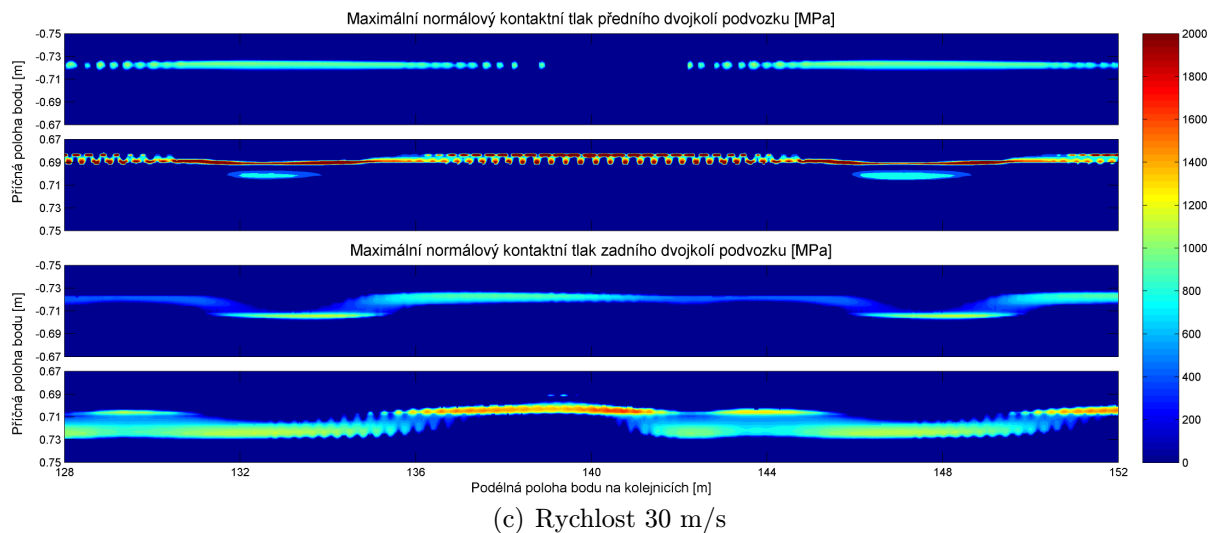
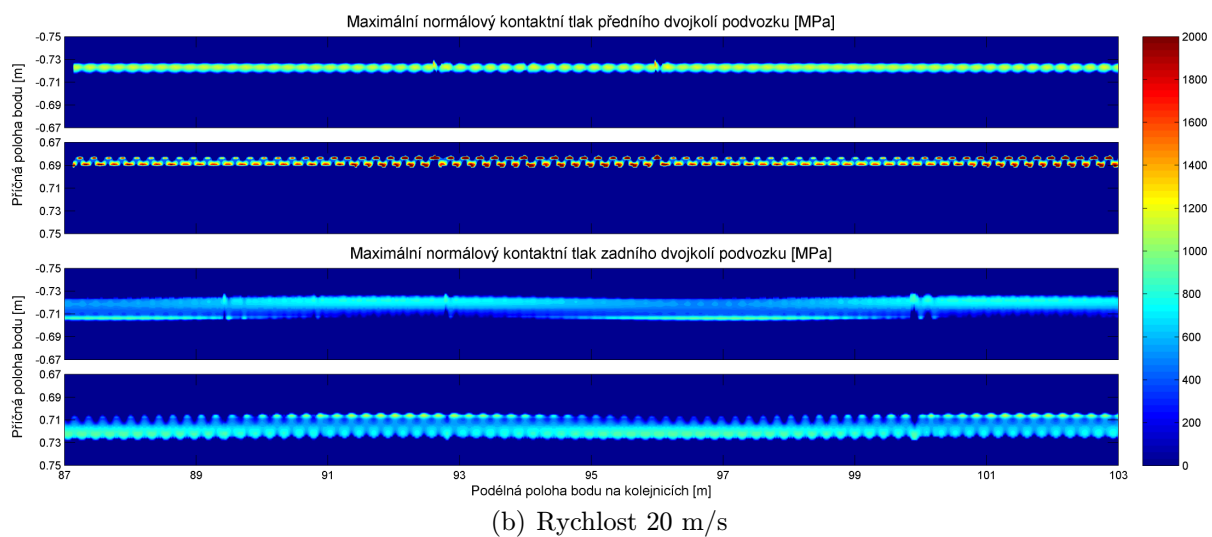
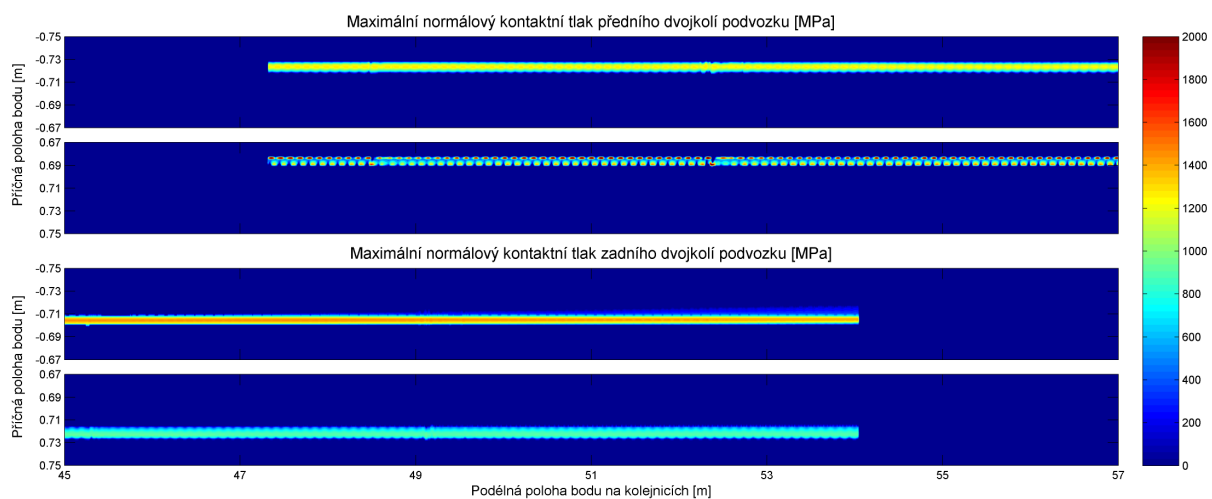
(e) Úhlové zrychlení klopení dvojkolí ( $\ddot{\theta}$ )



(f) Úhlové zrychlení rotace dvojkolí ( $\ddot{\varphi}$ )

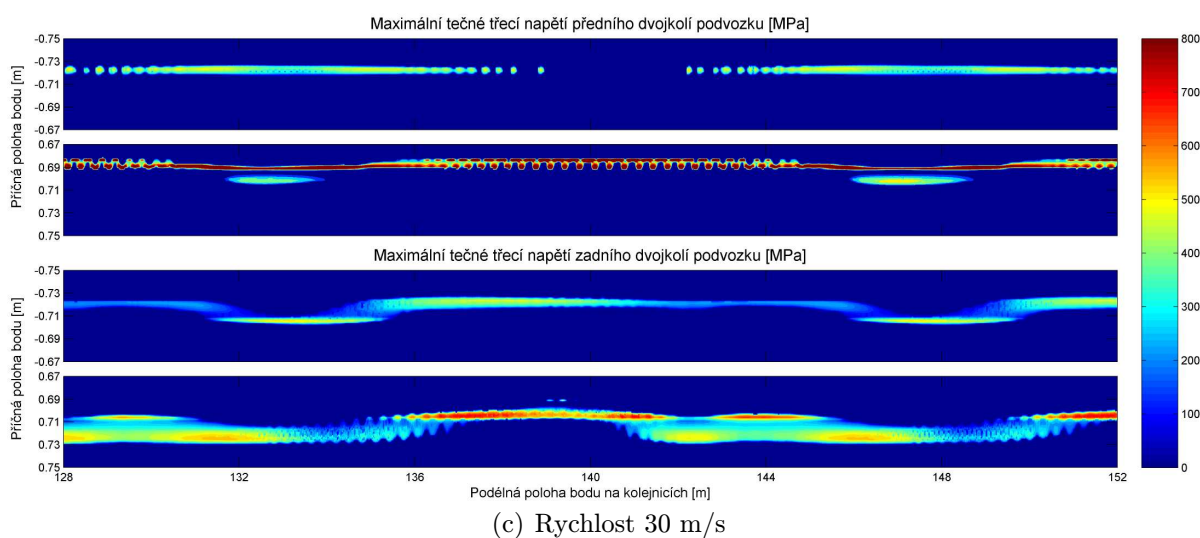
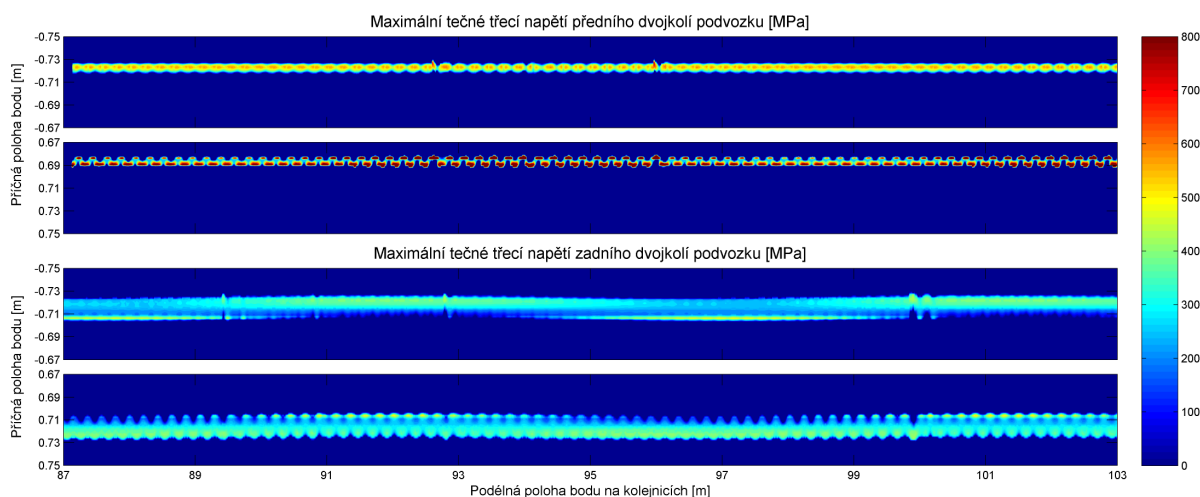
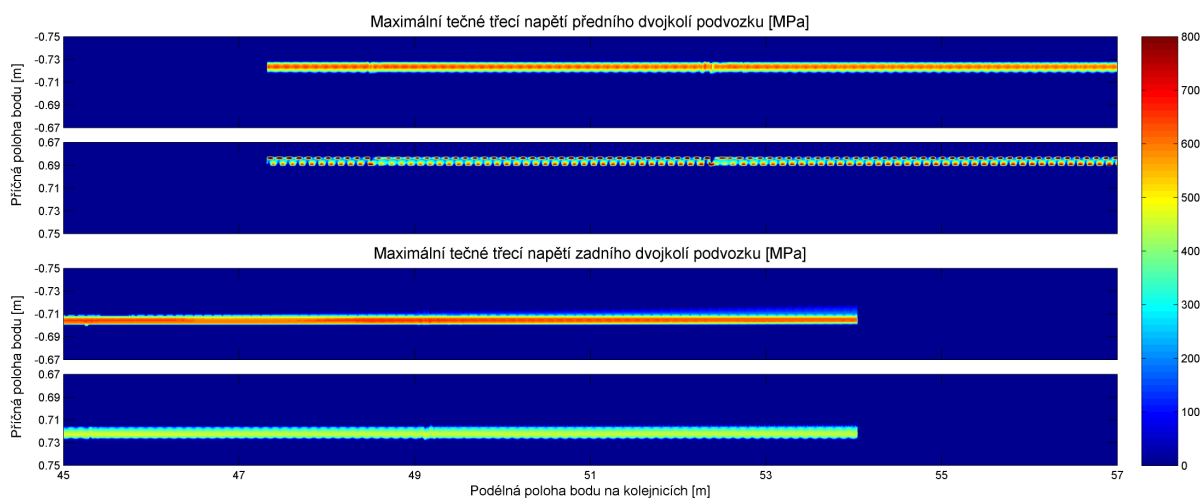
Obrázek 5.71: Vliv rychlosti vozidla při průjezdu obloukem o poloměru 300 m na vybuzení frekvence dvojkolí v jednotlivých směrech pohybu. Vlevo zadní dvojkolí podvozku, vpravo přední dvojkolí podvozku.

#### 5.4. JÍZDA VOZIDLA V OBLOUKU



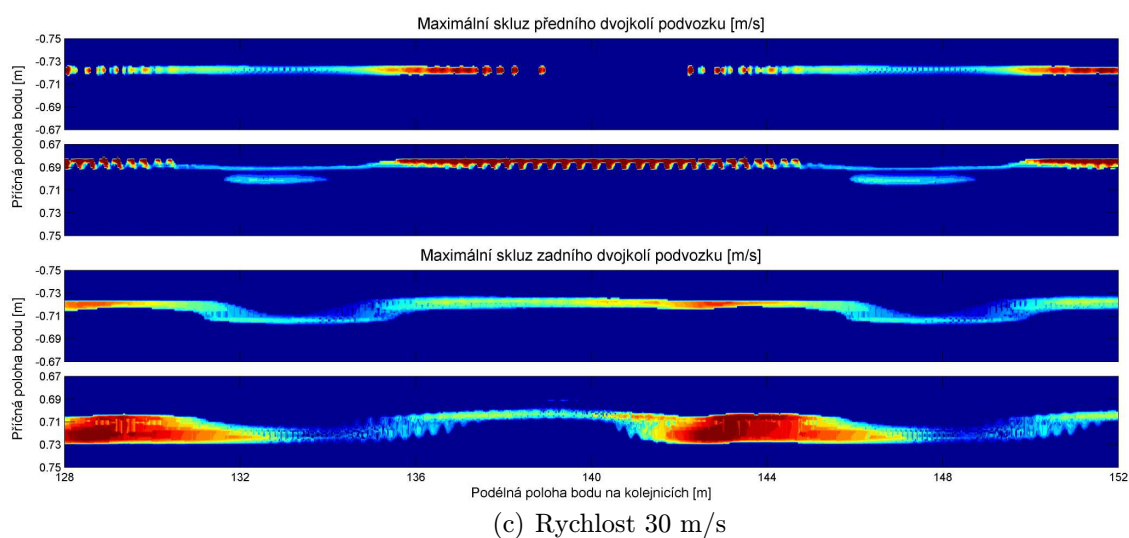
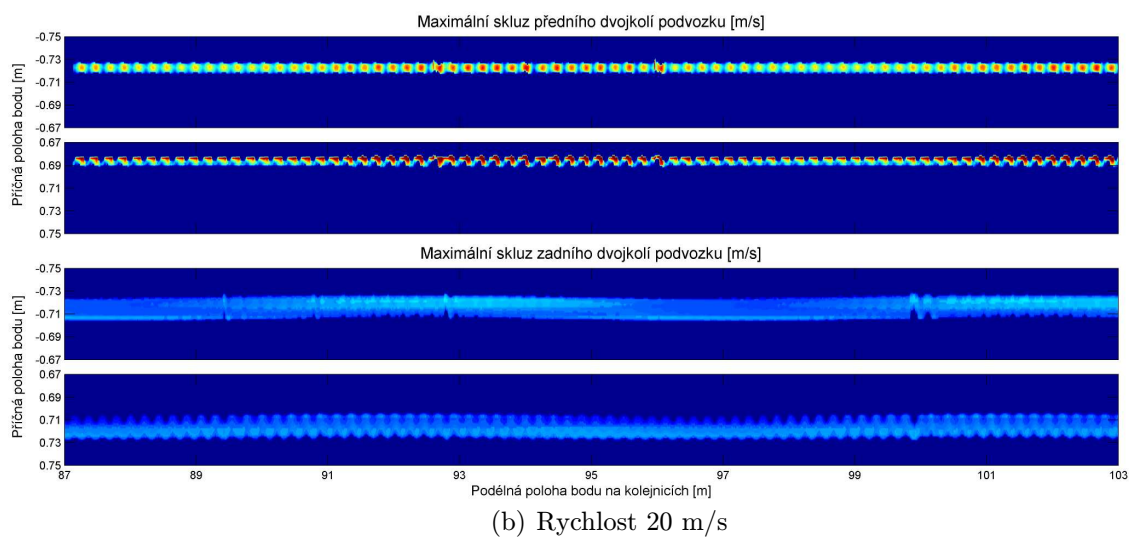
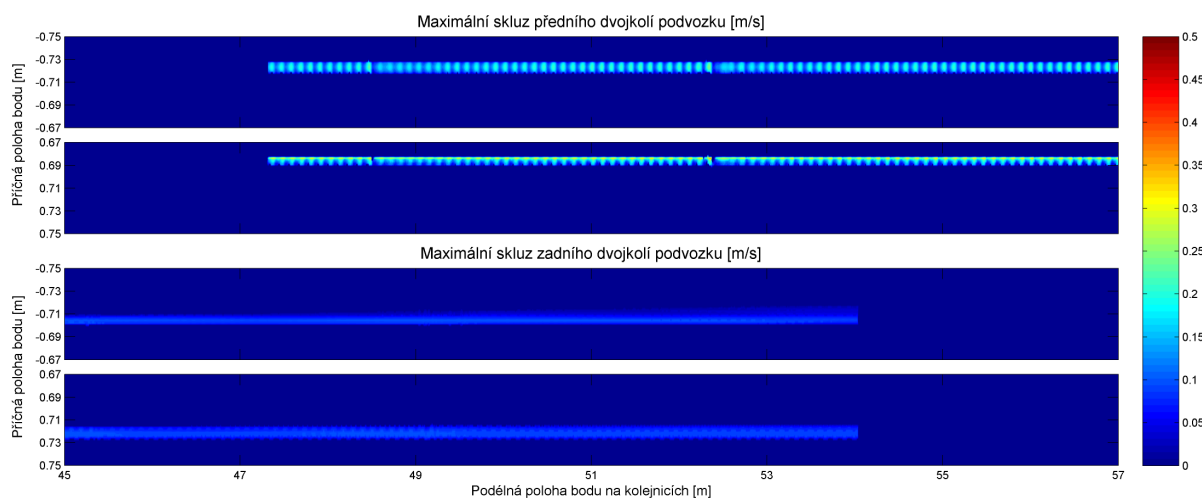
Obrázek 5.72: Vliv rychlosti vozidla při průjezdu obloukem o poloměru 300 m na rozložení maximálního normálového kontaktního tlaku na kolejnici na kolejnici.  
Vždy nahoře levá, dole pravá kolejnice.

## 5. VÝSLEDKY



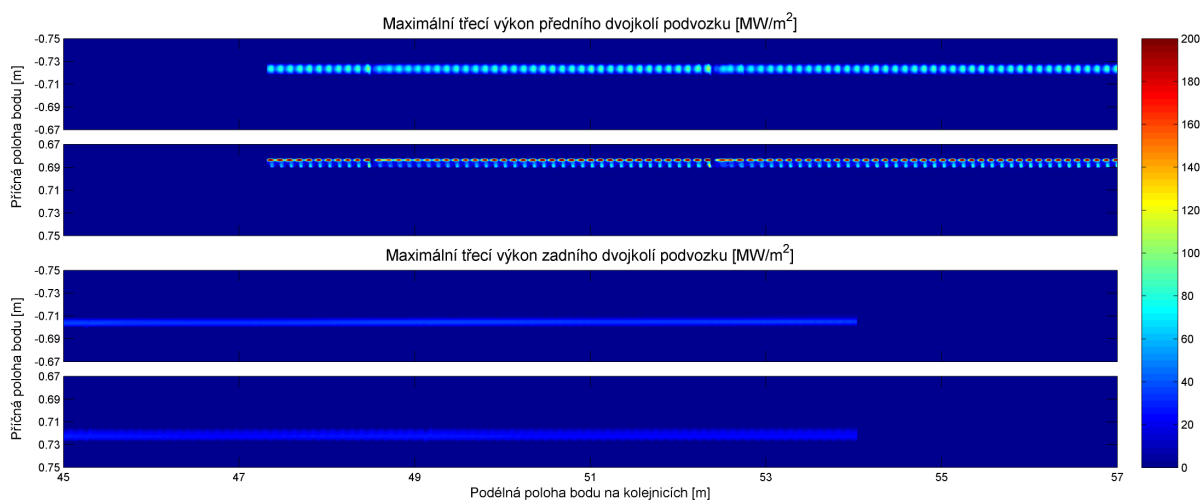
Obrázek 5.73: Vliv rychlosti vozidla při průjezdu obloukem o poloměru 300 m na rozložení maximálního tečného třecího napětí na kolejnici. Vždy nahoře levá, dole pravá kolejnice.

#### 5.4. JÍZDA VOZIDLA V OBLOUKU

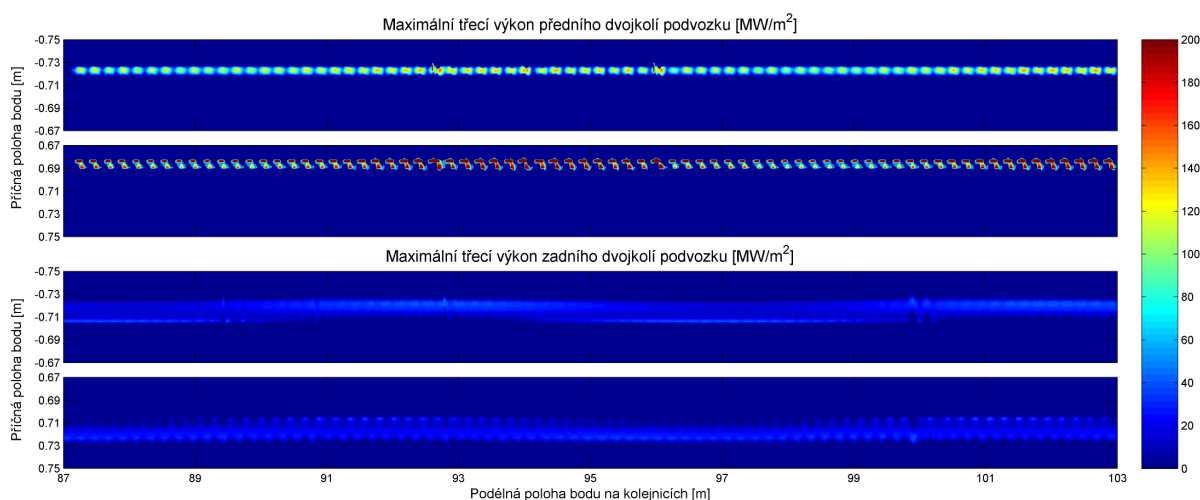


Obrázek 5.74: Vliv rychlosti vozidla při průjezdu obloukem o poloměru 300 m na rozložení maximálního skluzu na kolejnici. Vždy nahoře levá, dole pravá kolejnice.

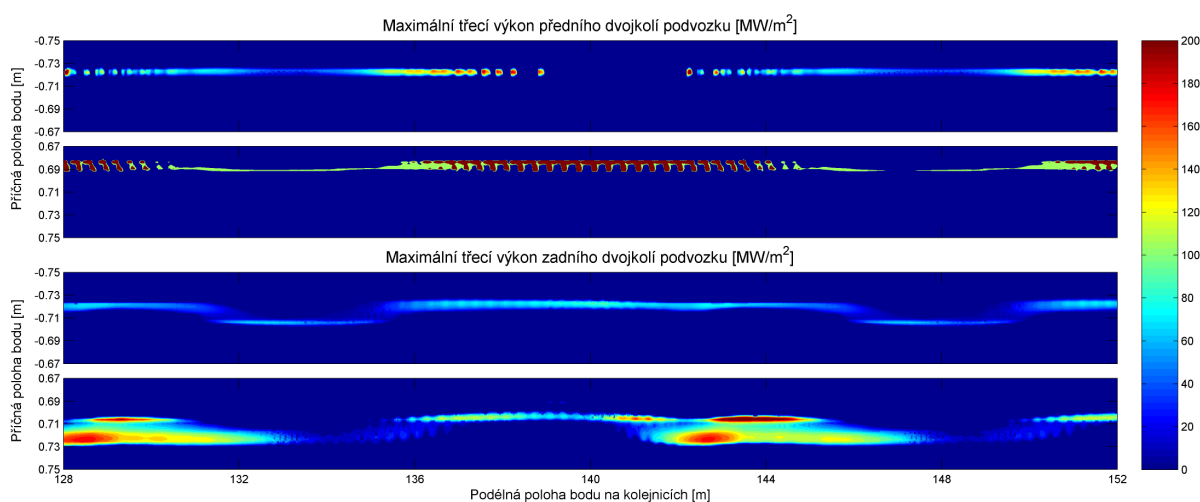
## 5. VÝSLEDKY



(a) Rychlost 10 m/s



(b) Rychlost 20 m/s

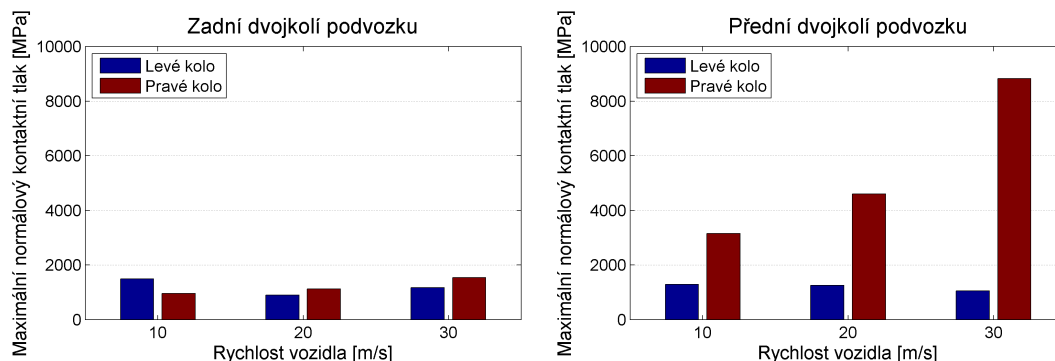


(c) Rychlost 30 m/s

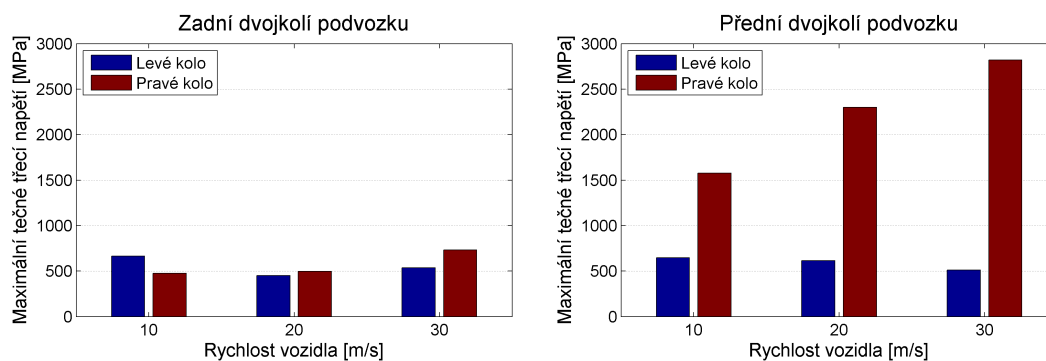
Obrázek 5.75: Vliv rychlosti vozidla při průjezdu obloukem o poloměru 300 m na rozložení maximálního třecího výkonu na kolejnici. Vždy nahoře levá, dole pravá kolejnice.



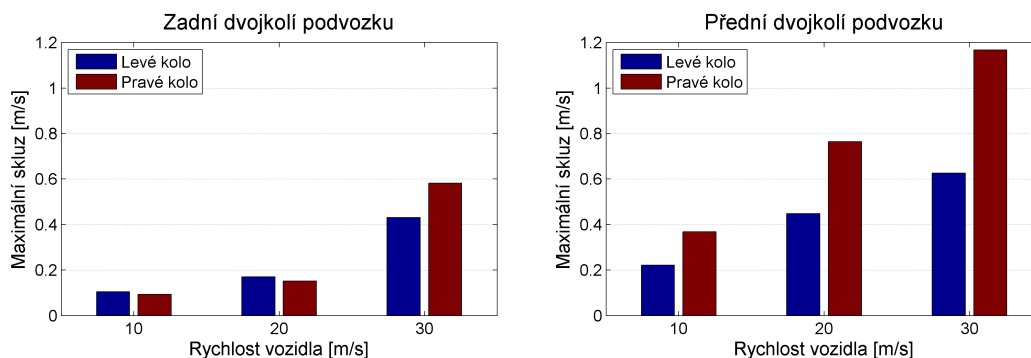
#### 5.4. JÍZDA VOZIDLA V OBLOUKU



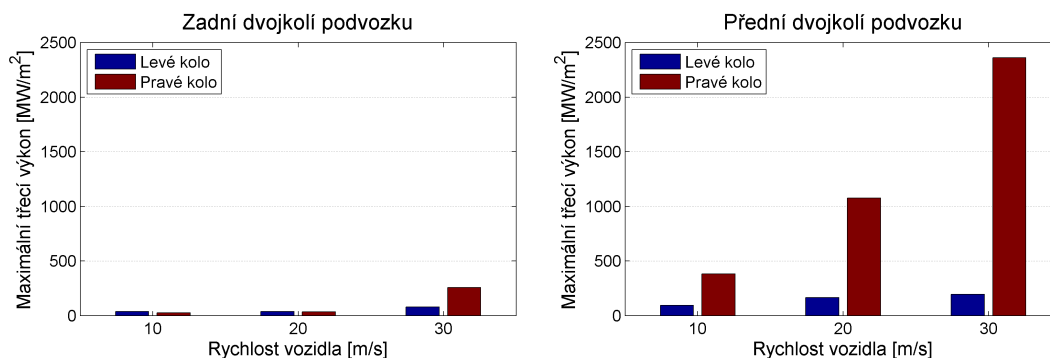
Obrázek 5.76: Vliv rychlosti vozidla při průjezdu obloukem o poloměru 300 m na hodnotu maximálního normálového kontaktního tlaku na kolejnici.



Obrázek 5.77: Vliv rychlosti vozidla při průjezdu obloukem o poloměru 300 m na hodnotu maximálního tečného třecího napětí na kolejnici.



Obrázek 5.78: Vliv rychlosti vozidla při průjezdu obloukem o poloměru 300 m na hodnotu maximálního skluzu na kolejnici.



Obrázek 5.79: Vliv rychlosti vozidla při průjezdu obloukem o poloměru 300 m na hodnotu maximálního třecího výkonu na kolejnici.



Na zatížení zadního dvojkolí je patrný další fakt, a to shoda rychlosti vozidla s rychlostí, pro kterou je oblouk navržen. Zvolený oblouk je navržen pro rychlost průjezdu 20 m/s, proto síla na levém i pravém kole zadního dvojkolí je nejbližší nominální hodnotě 100 kN. Při průjezdu vyšší rychlostí dochází k přetěžování pravé (vnější) kolejnice, jak má vozidlo snahu setrvačností pokračovat v jízdě rovně. Při průjezdu nižší rychlostí už naopak klopení oblouku není vyváжено odstředivou silou vozidla, proto je větší síla na levém (vnitřním kole).

Na podélné tečné síle se kmitání v kontaktu projevuje ještě výrazněji než na normálové síle. Zejména na silách na levé kolo u rychlosti 20 m/s je vidět opakované zpomalování vnitřního kola, které ujíždí vnějšimu. U rychlosti 30 m/s je průběh už výrazně ovlivněn ztrátou kontaktu vnitřního kola a kmitání tečné síly se projevuje spíše na pravém (vnějším) kole.

Mezi příčnou tečnou silou a normálovou silou existuje těsnější vazba než v případě podélné tečné síly. Průběhy příčné tečné síly jsou proto podobnější průběhům normálové síly, i když rozdíly tam jsou, protože vazba není lineární.

Rozbor frekvencí vybuzeých na dvojkolí (obrázek 5.71) ukazuje zejména jednu dominantní frekvenci – přibližně 90 Hz. Na této frekvenci kmitá zejména přední dvojkolí a odpovídá hluku, který vydává kolejové vozidlo v oblouku. Další významná frekvence je přibližně 2 Hz, která odpovídá vrtění dvojkolí. Ta ale není v grafech frekvenčního spektra zobrazena, protože vzorek dat pro vyhodnocení byl příliš malý (méně než 0.5 s průběhu pohybu). Další významné frekvence jsou většinou násobky 90 Hz, tedy následné harmonické frekvence.

Grafy projevů v kontaktu kola a kolejnic (obrázky 5.72 až 5.75) ukazují mnohem delší úsek kolejnice než v předchozí části (nyní 12 až 24 m). Proto kmity jsou zobrazeny hustěji. Rozložení kontaktních tlaků i další projevy ukazují, jak se s rostoucí rychlostí zvětšuje i kmitání dvojkolí. Při rychlosti 10 m/s jsou projevy ještě poměrně stabilní, při rychlosti 20 m/s je patrné výrazné kmitání. Při rychlosti 30 m/s už je vidět oblast, kde dochází ke ztrátě kontaktu a poskakování, změny působíště sil i velikostí jednotlivých projevů.

Poslední obrázky série - srovnání maximálních velikostí jednotlivých veličin vyhodnocovaných v kontaktu (5.76 až 5.79) nejlépe ukazují trendy závislosti na rychlosti. Na zadním dvojkolí podvozku se velikosti příliš nemění a jsou i řádově nižší než v případě předního dvojkolí. Jen v případě rychlosti 30 m/s už je poskakování předního dvojkolí tak významné, že ovlivní i to zadní.

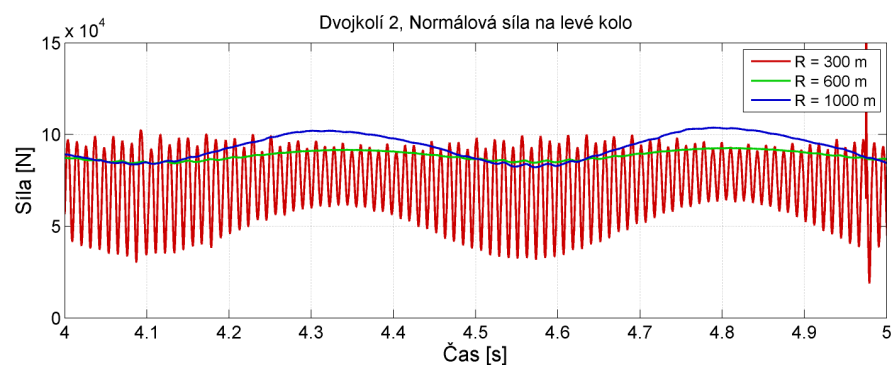
Na předním dvojkolí podvozku je patrná závislost maximálních projevů na rychlosti. Na maximálním normálovém kontaktním tlaku a maximálním tečném třecím napětí je vidět zvýšení zatížení na na pravé (vnější) kolo a naopak odlehčení levého (vnitřního) kola. Maximální skluz narůstá spolu s rychlostí. A maximální třecí výkon narůstá výrazně s rostoucí rychlostí, závislost je téměř lineární. Obrovský je rozdíl hodnot na levém a pravém kole, a to až o řád.

Celkově lze shrnout vliv rychlosti vozidla na působení v kontaktu tak, že se nezmění výrazně charakter projevů, ale intenzivně narůstá jejich intenzita.

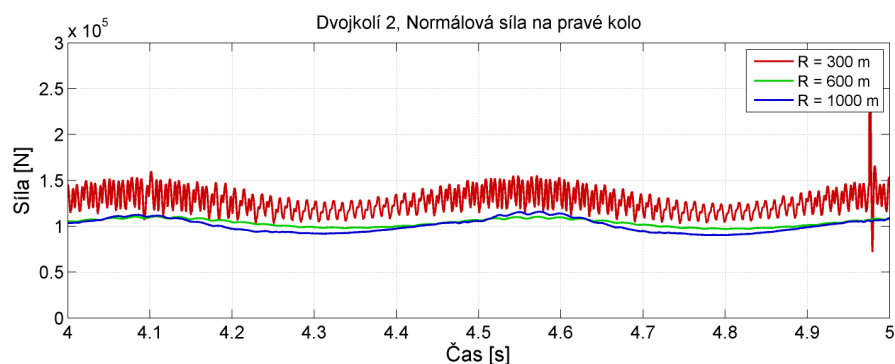
#### 5.4.4. Vliv poloměru oblouku

V poslední části je vyhodnocen vliv poloměru oblouku. Proto byly simulovány průjezdy vozidla rychlostí 20 m/s oblouky o poloměru 300 m, 600 m a 1000 m. Oblouk byl vždy navržen na rychlost průjezdu 20 m/s, takže tomu odpovídá klopení oblouku

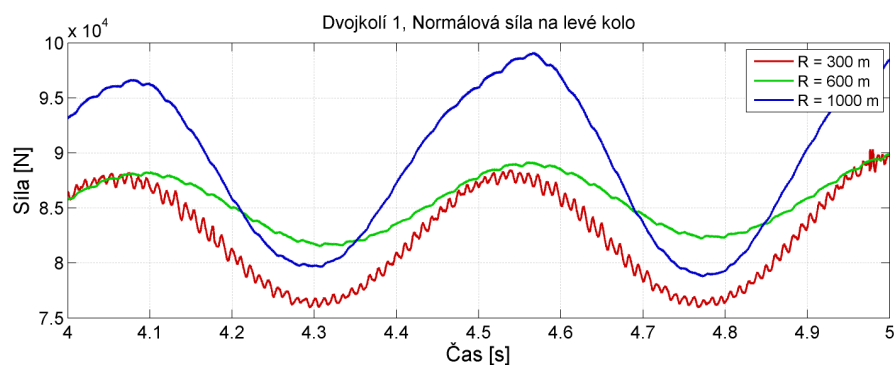
#### 5.4. JÍZDA VOZIDLA V OBLOUKU



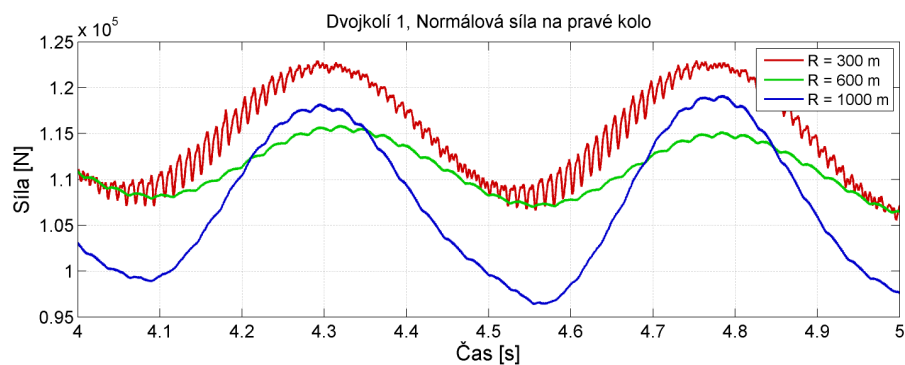
(a) Levé kolo předního dvojkolí podvozku



(b) Pravé kolo předního dvojkolí podvozku



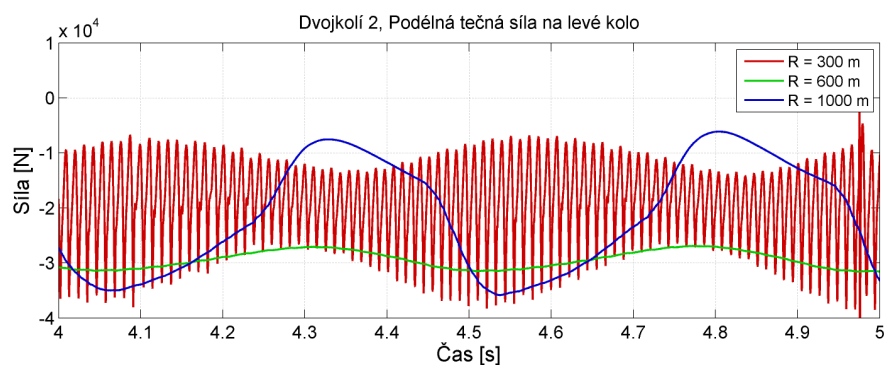
(c) Levé kolo zadního dvojkolí podvozku



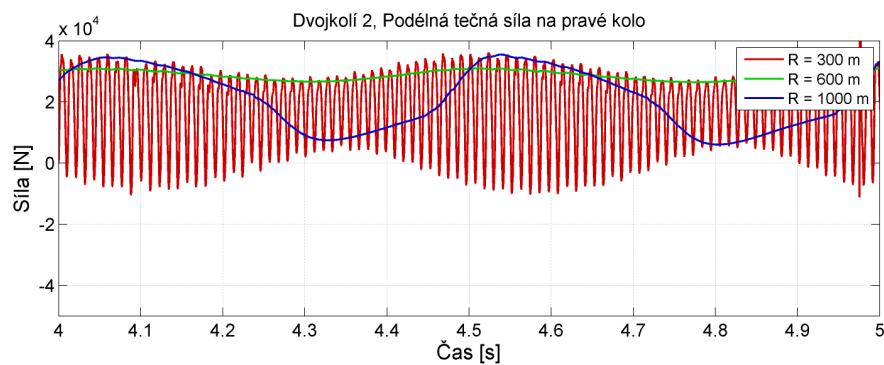
(d) Pravé kolo zadního dvojkolí podvozku

Obrázek 5.80: Vliv poloměru oblouku na průběh normálové síly při průjezdu vozidla rychlostí 20 m/s.

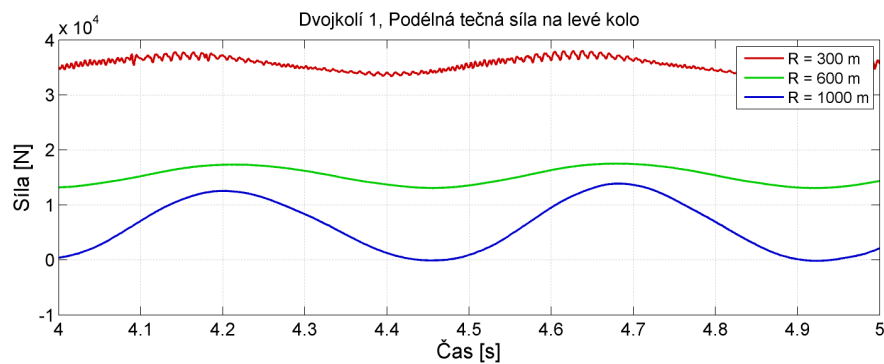
## 5. VÝSLEDKY



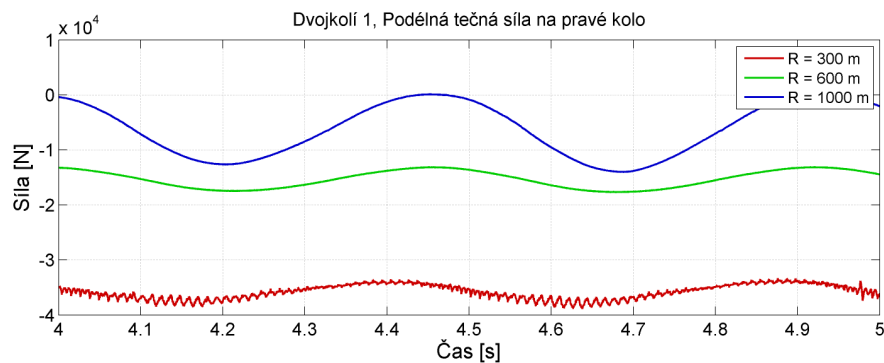
(a) Levé kolo předního dvojkolí podvozku



(b) Pravé kolo předního dvojkolí podvozku



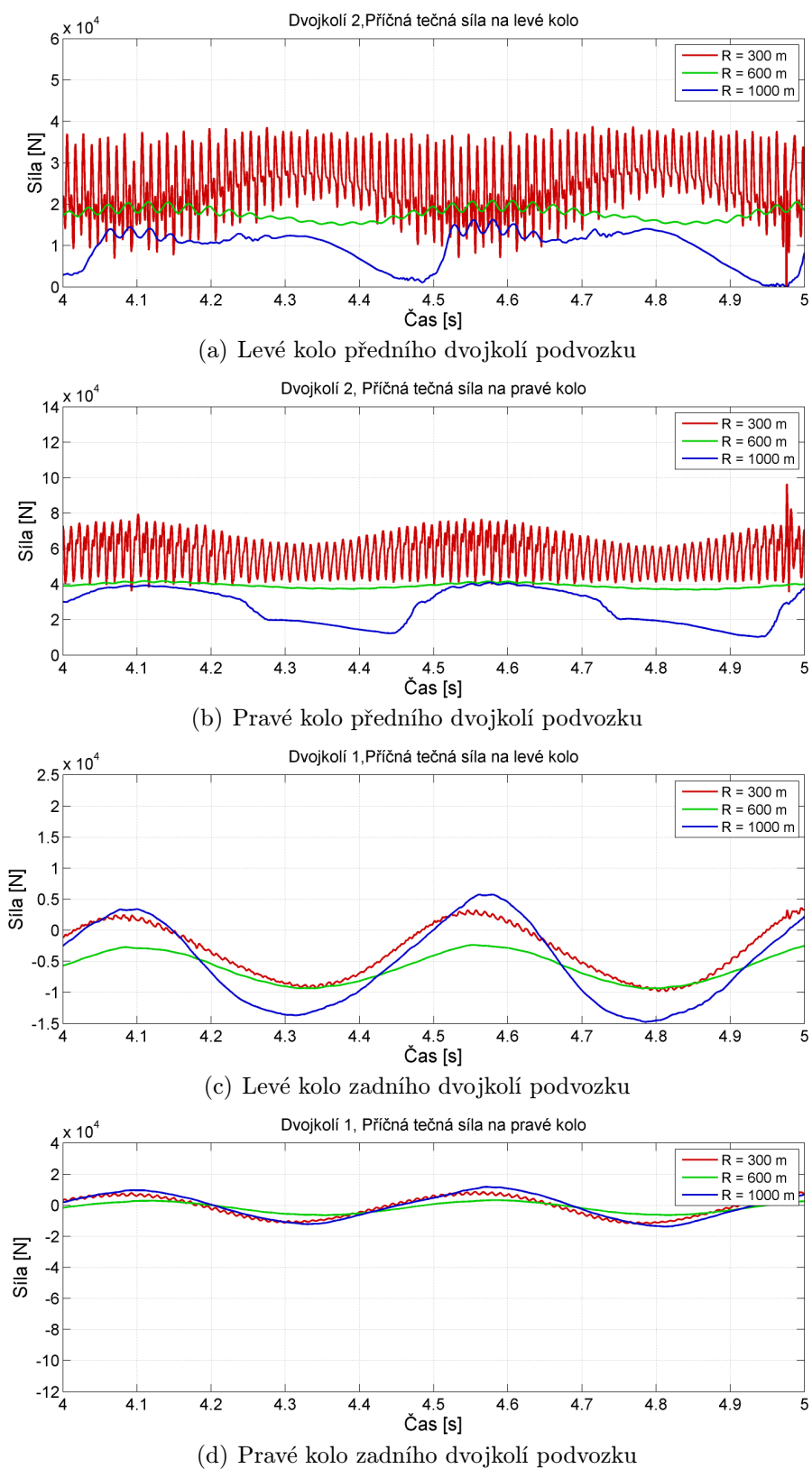
(c) Levé kolo zadního dvojkolí podvozku



(d) Pravé kolo zadního dvojkolí podvozku

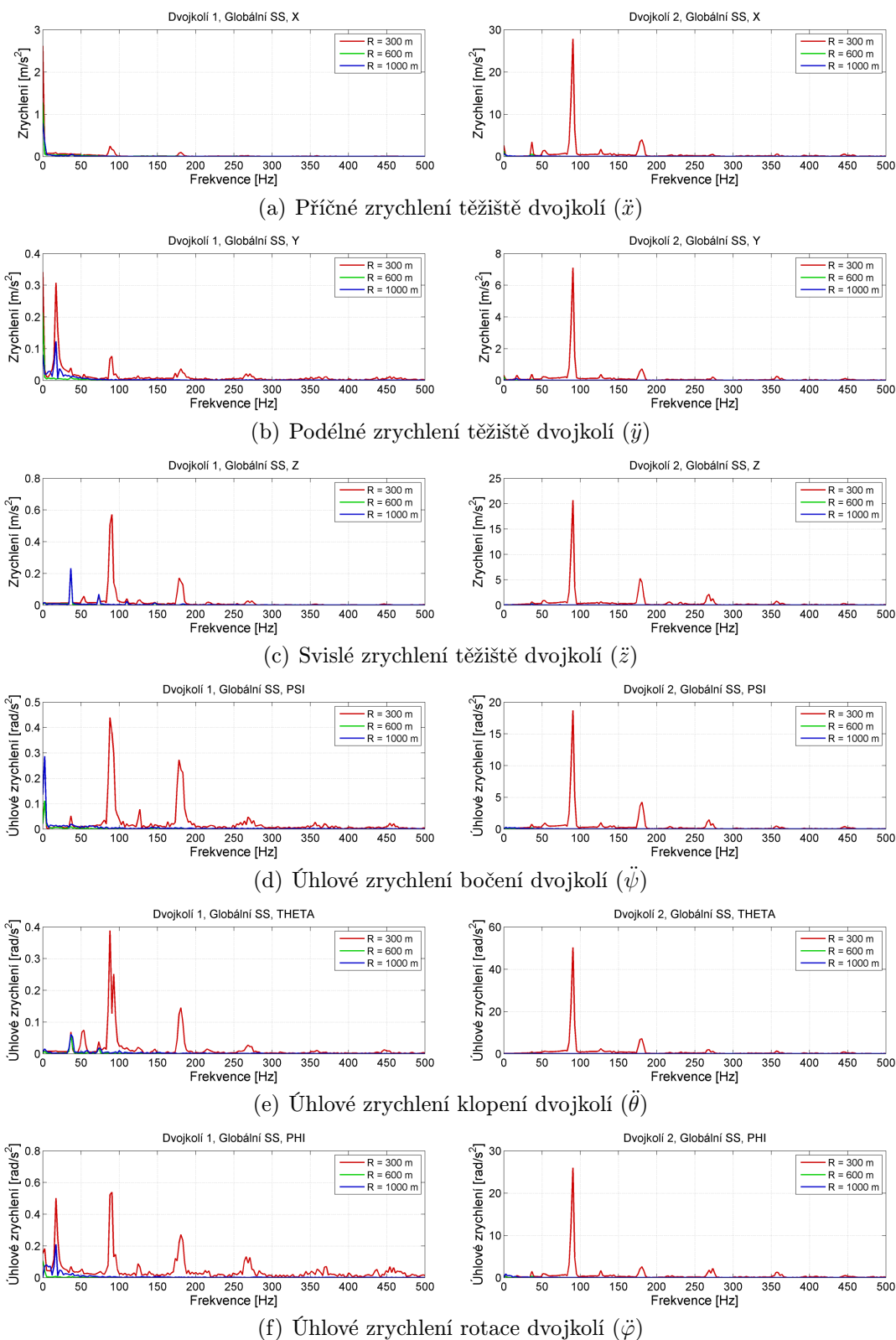
Obrázek 5.81: Vliv poloměru oblouku na průběh podélné tečné síly při průjezdu vozidla rychlostí 20 m/s.

#### 5.4. JÍZDA VOZIDLA V OBLOUKU



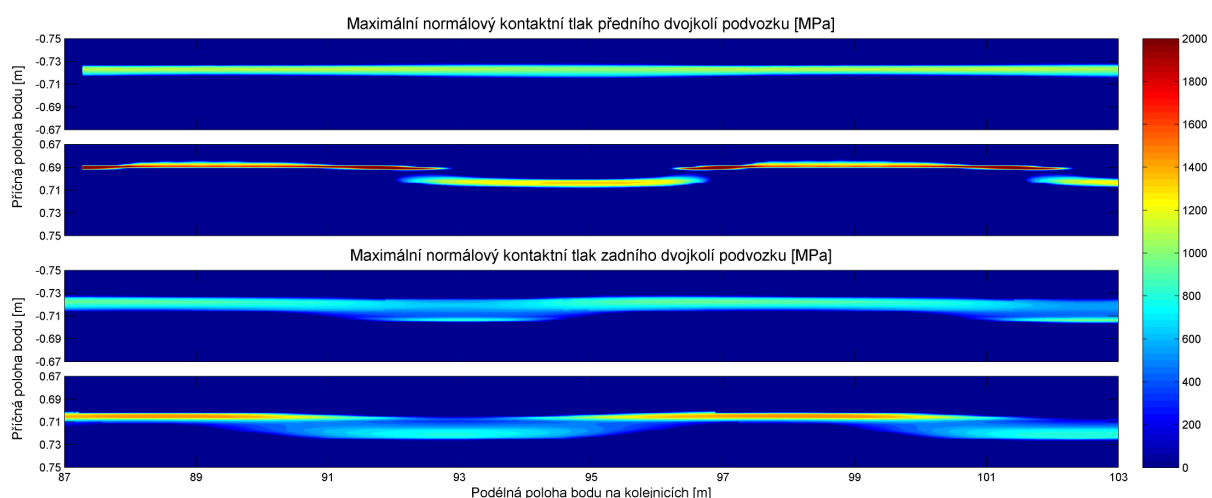
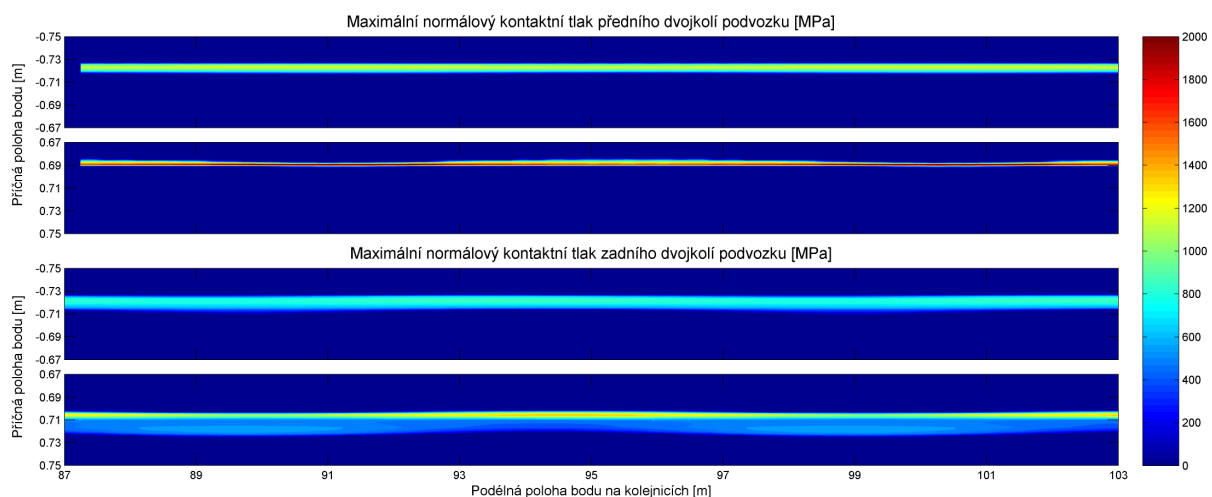
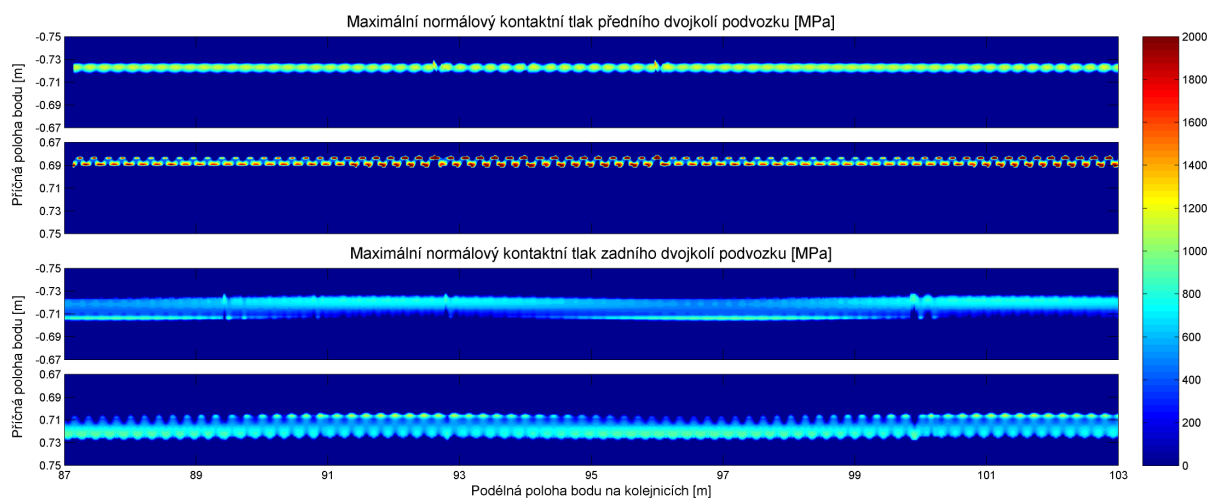
Obrázek 5.82: Vliv poloměru oblouku na průběh příčné tečné síly při průjezdu vozidla rychlostí 20 m/s.

## 5. VÝSLEDKY



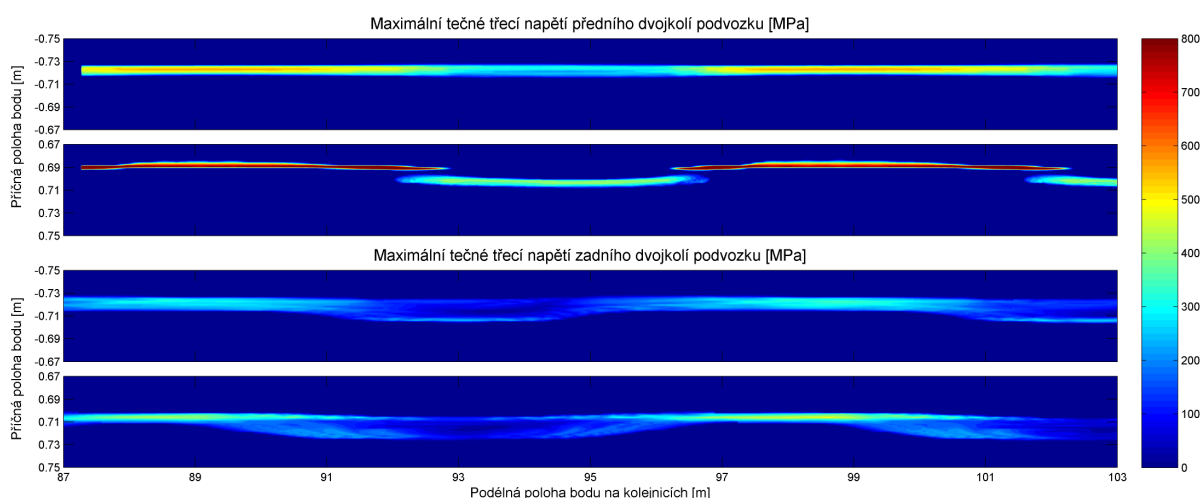
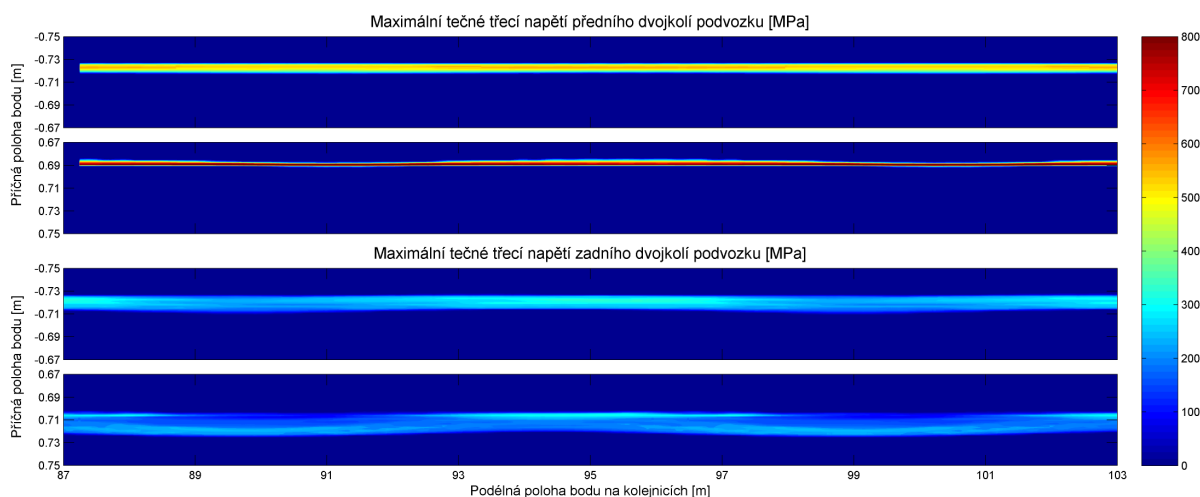
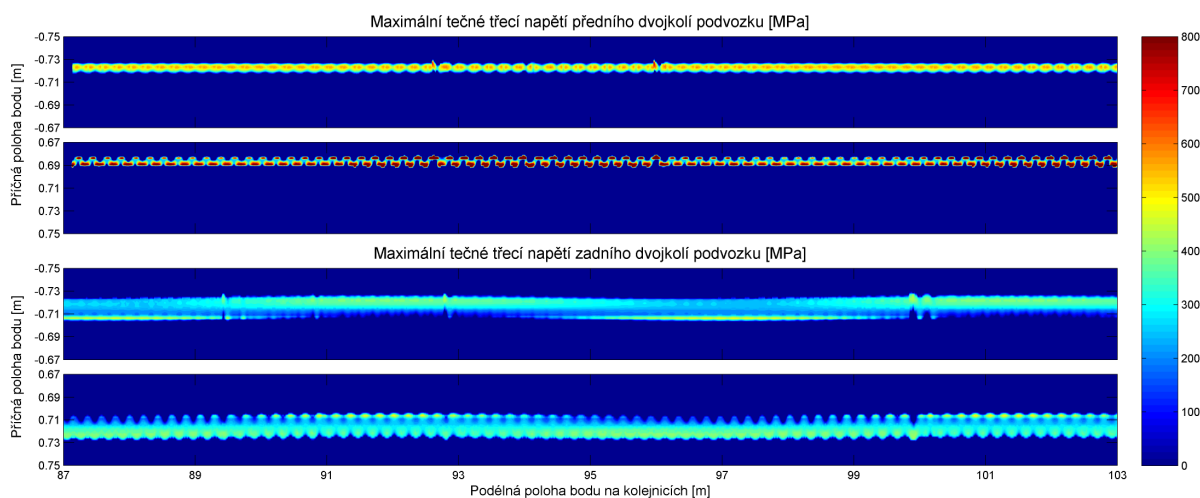
Obrázek 5.83: Vliv poloměru oblouku při průjezdu vozidla rychlostí 20 m/s na vybuzení frekvence dvojkolí v jednotlivých směrech pohybu. Vlevo zadní dvojkolí podvozku, vpravo přední dvojkolí podvozku.

#### 5.4. JÍZDA VOZIDLA V OBLOUKU



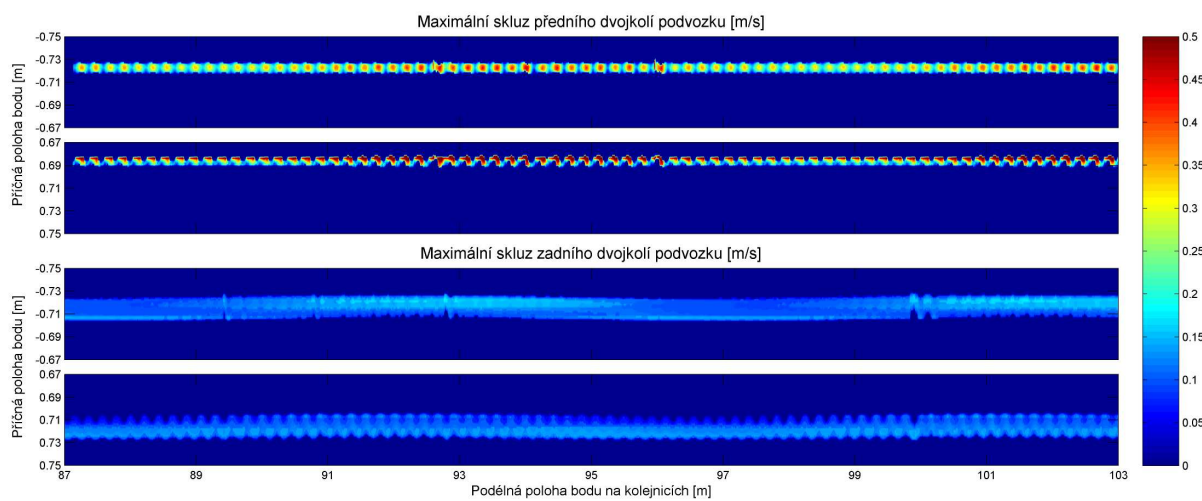
Obrázek 5.84: Vliv poloměru oblouku na rozložení maximálního normálového kontaktního tlaku na kolejnici při průjezdu vozidla rychlostí 20 m/s. Vždy nahoře levá, dole pravá kolejnice.

## 5. VÝSLEDKY

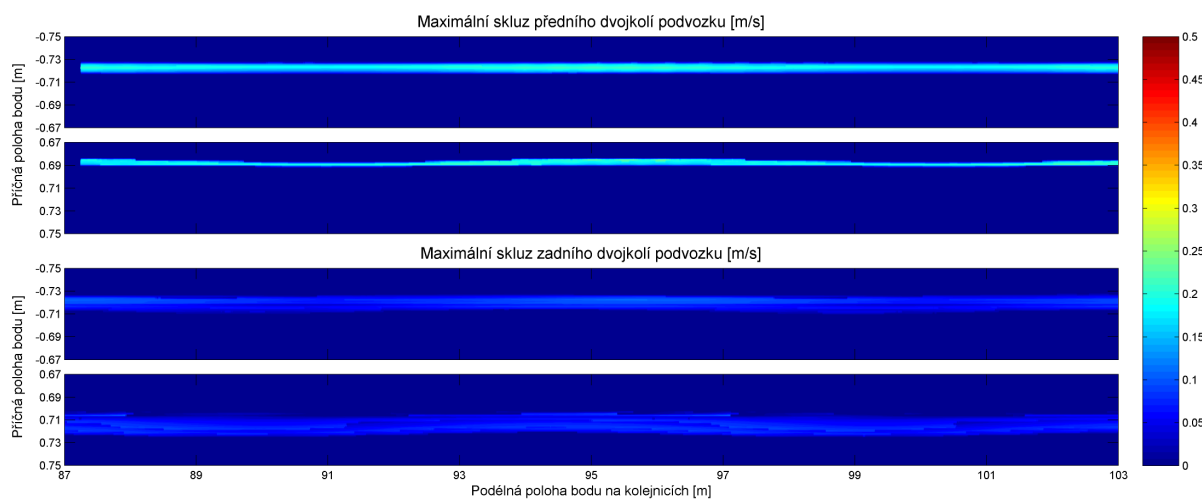


Obrázek 5.85: Vliv poloměru oblouku na rozložení maximálního tečného třecího napětí na kolejnici při průjezdu vozidla rychlostí 20 m/s. Vždy nahoře levá, dole pravá kolejnice.

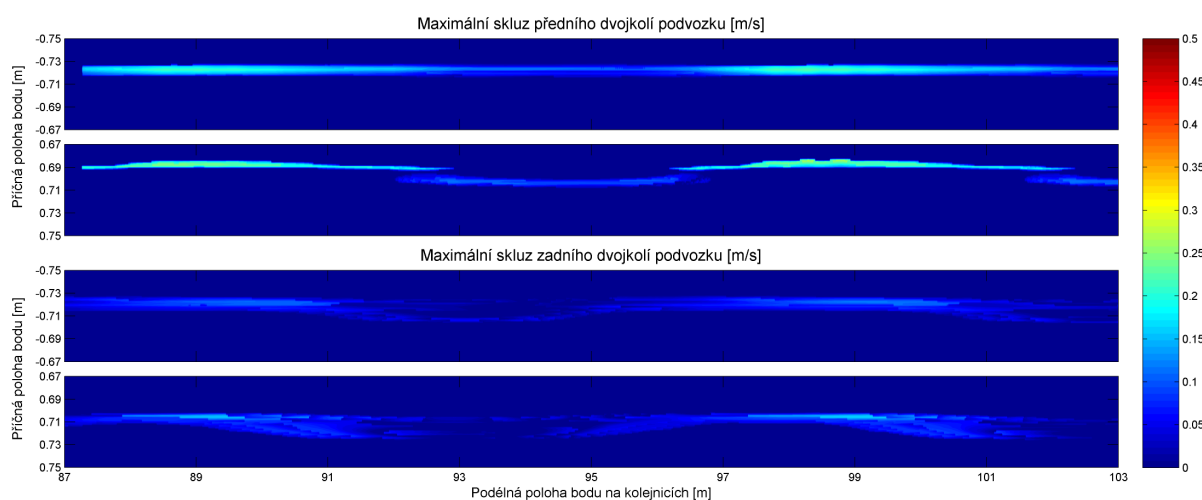
#### 5.4. JÍZDA VOZIDLA V OBLOUKU



(a) Poloměr oblouku 300 m



(b) Poloměr oblouku 600 m

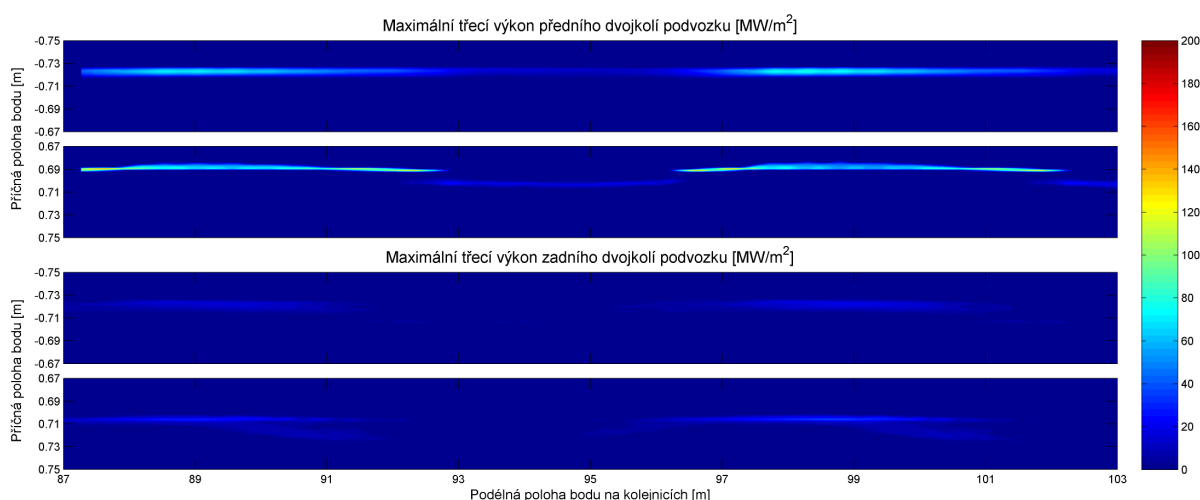
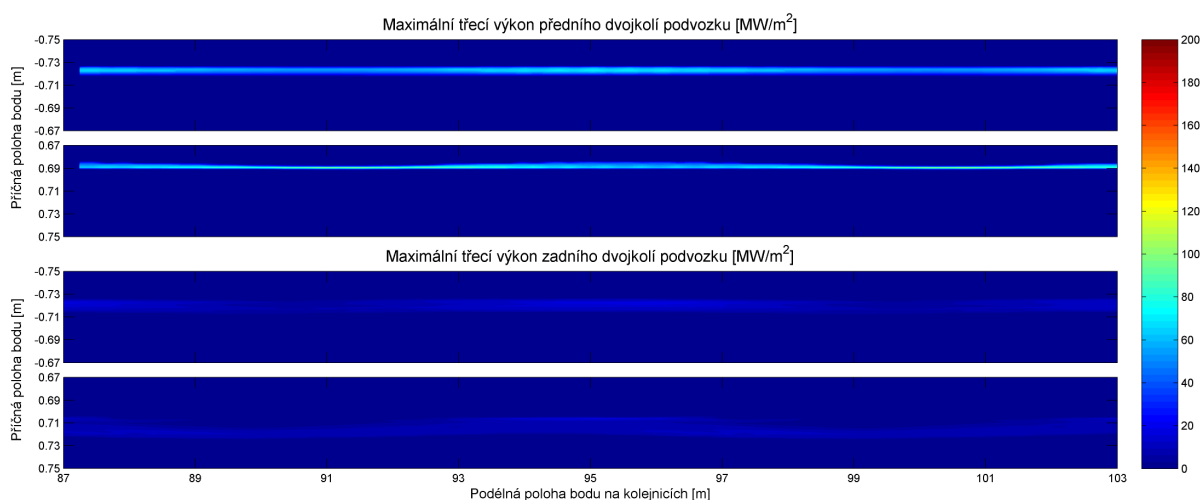
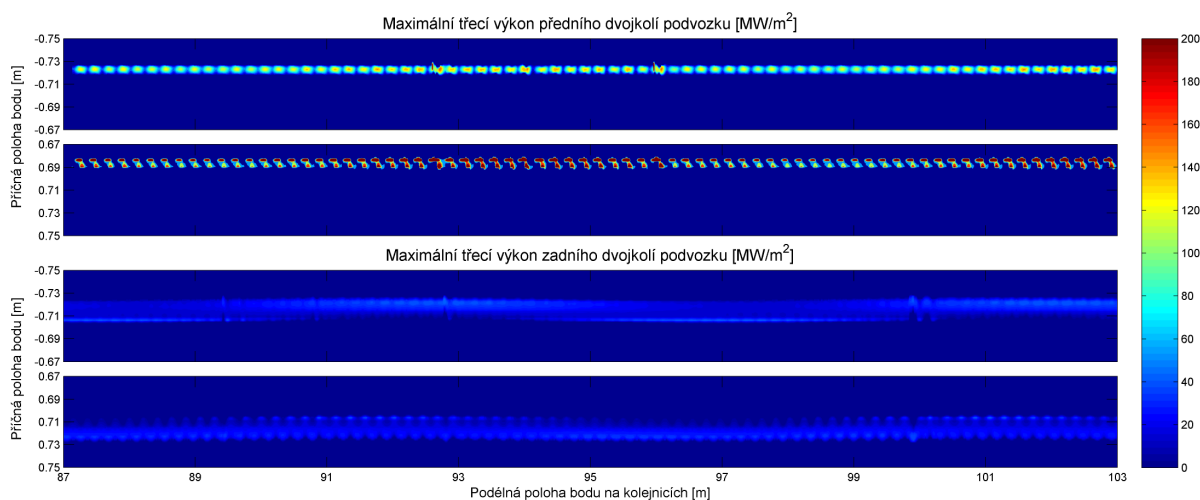


(c) Poloměr oblouku 1000 m

Obrázek 5.86: Vliv poloměru oblouku na rozložení maximálního skluzu na kolejnici při průjezdu vozidla rychlostí 20 m/s. Vždy nahoře levá, dole pravá kolejnice.

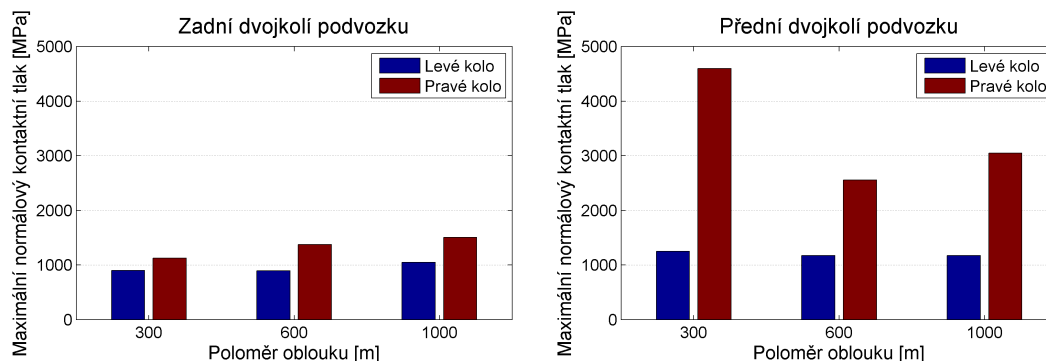


## 5. VÝSLEDKY

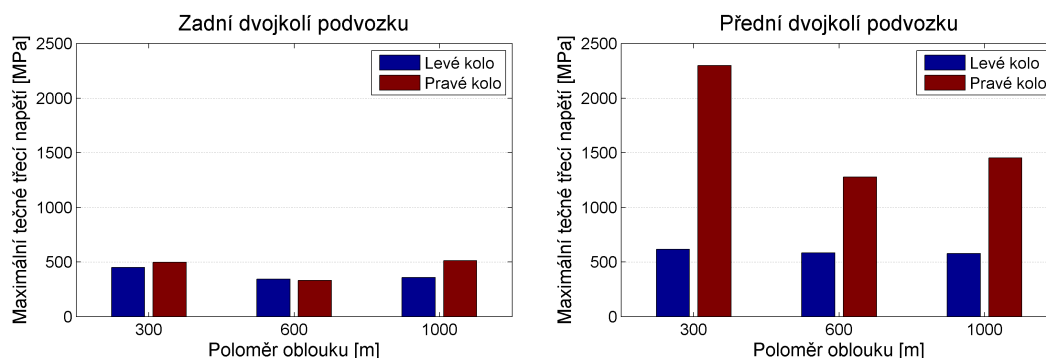


Obrázek 5.87: Vliv poloměru oblouku na rozložení maximálního třecího výkonu na kolejnici při průjezdu vozidla rychlostí 20 m/s. Vždy nahoře levá, dole pravá kolejnice.

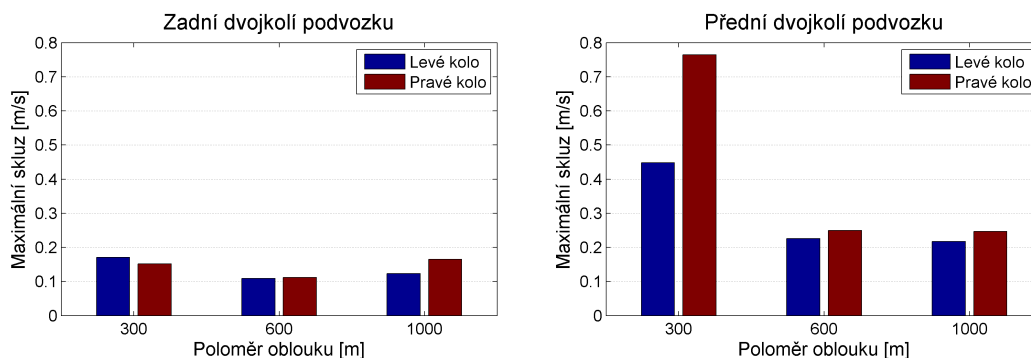
#### 5.4. JÍZDA VOZIDLA V OBLOUKU



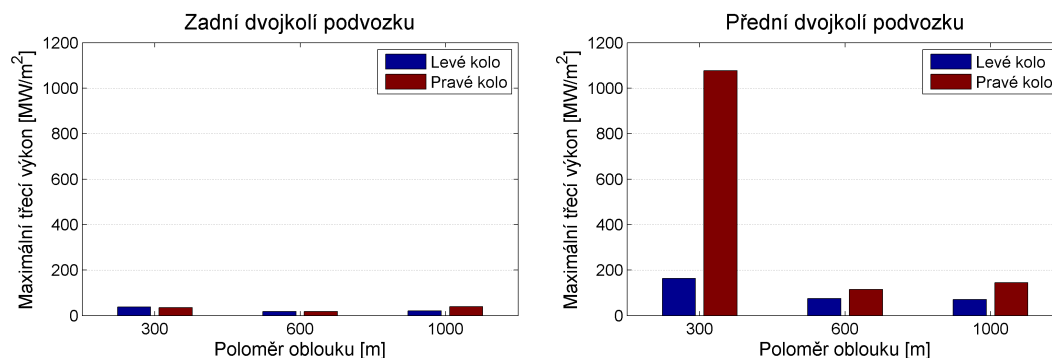
Obrázek 5.88: Vliv poloměru oblouku na hodnotu maximálního normálového kontaktního tlaku na kolejnici při průjezdu vozidla rychlostí 20 m/s.



Obrázek 5.89: Vliv poloměru oblouku na hodnotu maximálního tečného třecího napětí na kolejnici při průjezdu vozidla rychlostí 20 m/s.



Obrázek 5.90: Vliv poloměru oblouku na hodnotu maximálního skluzu na kolejnici při průjezdu vozidla rychlostí 20 m/s.



Obrázek 5.91: Vliv poloměru oblouku na hodnotu maximálního třecího výkonu na kolejnici při průjezdu vozidla rychlostí 20 m/s.

v tabulce 5.2. Vyhodnocovány byly stejné parametry jako v případě rychlosti vozidla, tedy síly v kontaktu (obrázky 5.80 až 5.82), frekvence vybuze­né na dvojkolí v jednotlivých stupních volnosti pohybu (obrázek 5.83) a projevy v kontaktu kola a kolejnice (obrázky 5.84 až 5.91).

Na průbězích normálové síly v kontaktu je patrné, že větší poloměr výrazně zklidní projevy v kontaktu. Zatímco u poloměru 300 m jsou průběhy sil výrazně rozkmitané, u větších poloměrů dochází jen k mírnému zvlnění. Co však je zajímavé, varianta s průjezdem obloukem o poloměru 600 m má menší amplitudu normálové síly než v případě poloměru 1000 m. Možnou odpověď, proč to tak je, ukazují průběhy podélné tečné síly. U poloměru 1000 m dochází k poklesu podélné tečné síly (např. v čase 4.3 s - 4.4 s na obrázcích 5.81(a) a 5.81(b)). V tomto okamžiku jede dvojkolí téměř rovně, proto musí později (např. v čase 4.5 s - 4.6 s) být podélné tečné síly intenzivnější, aby dvojkolí stočily do směru jízdy. Normálová síla je ovlivněna změnou působiš­te.

Na frekvenčních spektrech (obrázek 5.83) je vidět, že kmitání vybuze­né při průjezdu obloukem o poloměru 300 m má mnohem větší amplitudu než u oblouků s větším průměrem. Jak bylo zmíněno v předchozí části, vybuze­né kmitání u oblouku 300 m má frekvenci přibližně 90 Hz a příslušné násobky pro vyšší harmonické. Frekvence vybuze­né u větších poloměrů jsou nižší - přibližně 20 Hz nebo 40 Hz a nejsou tak výrazné.

Projevy v kontaktu reflektují to, co bylo zjištěno v průbězích kontaktních sil. Rozložení maximálního normálového tlaku při průjezdu obloukem o poloměru 300 m (obrázek 5.84(a)) ukazuje, že na vnější kolejnici je vysoké zatížení od průjezdu předního dvojkolí podvozku s kmitáním o nějaké vyšší frekvenci (rozložení vypadá jako tečky v řadě). Rozložení maximálního normálového kontaktního tlaku při průjezdu obloukem o poloměru 600 m (obrázek 5.84(b)) ukazuje rovnoměrné zatížení vnitřní hrany vnější kolejnice oblouku s jen malými výkyvy (maximální normálový kontaktní tlak je v jednom souvislém pásu). A nakonec v případě průjezdu oblouku o poloměru 1000 m (obrázek 5.84(c)) je patrné přesouvání kontaktní plochy na vnější kolejnici z vnitřní hrany do středu kolejnice, kde je bližší jízdě po rovné kolejnici, a zpět (rozložení maximálního normálového kontaktního tlaku má tvar delších pásů s kratšími oblastmi přechodu z jednoho na druhý).

Při pohledu na maximální třecí výkon (obrázek 5.87) je patrná mnohem větší zátěž u průjezdu oblouku o poloměru 300 m. Jenom zde se hodnoty blíží až k maximu škály, pro ostatní poloměry jsou o více než polovinu nižší. U průjezdu oblouku o poloměru 1000 m je pak další důkaz toho, že v určitých fázích pohybu jedou dvojkolí přibližně rovně - v oblasti, kde se oblast kontaktu vnější kolejnice a předního dvojkolí přesune ke středu kolejnice, dojde k výraznému poklesu třecího výkonu.

Srovnání maximálních hodnot jednotlivých veličin v kontaktu (obrázky 5.88 až 5.91) ukazují, že největší zatížení zadního dvojkolí není nijak výrazně závislé na poloměru oblouku. Oproti tomu v případě zatížení předního dvojkolí podvozku dojde zejména u skluzu a třecího výkonu k výraznému zvětšení zátěže v kontaktu při zmenšení poloměru oblouku na 300 m.

#### 5.4.5. Shrnutí

Výsledky simulací průjezdu obloukem ukazují charakter zatížení, které odpovídá opotřebení, které vzniká na reálných kolejnicích v provozu, a to mírné zvlnění vnitřní kolejnice oblouku a výrazné opotřebení vnitřní hrany vnější kolejnice oblouku. Délka vln

#### 5.4. JÍZDA VOZIDLA V OBLOUKU

v simulaci je sice větší než v případě nerovností na kolejnicích (cca. 20 cm v simulaci oproti cca. 8 cm ve skutečnosti), ale některé vlivy nebyly zahrnuty do výpočtu, a to tuhost uložení dvojkolí (zejména torzní) může být vyšší, také tuhost uložení kolejnic může být jiná.

Studie vlivů rychlosti vozidla a poloměru oblouku ukazují, že příliš malý poloměr oblouku může mít zásadní vliv na zatížení v kontaktu kvůli vybuzenému kmitání a vysokému třecímu výkonu v kontaktu. Tyto kmity lze odstranit zvětšením poloměru oblouku. Do jisté míry toto je v souladu s železničními normami, protože minimální poloměr oblouku nových tratí byl zvýšen právě z 300 m na 600 m. Motivací bylo hlavně zvýšení cestovní rychlosti a komfortu cestování, ale i na opotřebení má pozitivní účinek.

Vliv rychlosti při průjezdu obloukem o poloměru 300 m byl při simulacích také zaznamenán. Snížení rychlosti vozidla neodstraní nežádoucí kmitání dvojkolí, ale sníží intenzitu vibrací a velikost zatížení v kontaktu.

## 6. Závěr

### 6.1. Cíl práce

Při provozu kolejových vozidel dochází k opotřebení kol a kolejnic, k němuž dochází v důsledku tření ve vzájemném kontaktu kola a kolejnice a postupně se jím vytvářejí různé druhy nerovností - plošky způsobené zablokováním kola při brzdění, odchylky od kruhovitosti na styčné ploše, opotřebení profilu na okolku. Podobné nerovnosti vznikají i na kolejnicích, a to zejména v obloucích. Na vnější kolejnici bývá opotřeбенý profil v důsledku zatížení hrany kolejnice, na vnitřní vzniká zase zvlnění styčné plochy prokluzu vnitřního kola.

Aby bylo možné sledovat dění v kontaktu kol a kolejnic, byl vytvořen výpočtový model, který simuluje pohyb zjednodušeného kolejového vozidla po trati a detailně sleduje projevy na kontaktních površích, přičemž je uvažována obecná geometrie trati i kontaktních ploch.

### 6.2. Vlastnosti použitého modelu

Vozidlo je zjednodušeno na soustavu tuhých těles, která jsou spojena členy pružina-tlumič a vykonávají obecný prostorový pohyb. Kolejnice jsou modelovány jako pružné nosníky prutovými prvky, kolejový svršek jako soustava tuhých těles, která k nim je připojena členy pružina-tlumič. Tvar trati (křivost, sklon, převýšení vnější kolejnice) je modelován pomocí prostorové křivky střednice, kde ke každému bodu trati je definován lokální souřadný systém, který udává rovinu styčných povrchů kolejnic. Skutečný tvar kol a kolejnic včetně nerovností je do modelu zapojen pomocí funkcí povrchu kola a povrchu kolejnice. S jejich využitím a podle polohy dvojkolí v lokálním souřadném systému trati lze stanovit funkce vzdálenosti obou povrchů, která je vstupem metod stanovení sil v kontaktu, přičemž lze zvolit z několika běžně používaných metod. Celý model je implementován ve formě zdrojového kódu v programu Matlab.

Bylo provedeno porovnání vlastností jednotlivých metod stanovení sil v kontaktu kol a kolejnice na zjednodušených příkladech, i když pro vlastní simulace jízdy vozidla byla použita pouze jedna z nich, a to algoritmus CONTACT. Tato metoda je sice výpočetně nejnáročnější, ale také nejstabilnější a jejím použitím je možné získat nejvíce informací o dění v kontaktu.

Srovnání výpočetní náročnosti je následující - zatímco v případě analytických metod stačil pro výpočet jednoho kroku čas 4 s a 700 MB operační paměti, v případě algoritmu CONTACT trval jeden krok výpočtu 18 s a algoritmus potřeboval 8 GB paměti pro inicializaci, i když při běhu výpočtu už postačilo 5 GB operační paměti. Při minimálním použitelném časovém kroku  $2 \cdot 10^{-4}$  s trval výpočet doby jízdy 1 s přibližně 25 hodin. S tímto krokem byl však výpočet často nestabilní a vznikalo podélné kmitání, vybuzené pouze numerickou integrací. Spolehlivý byl časový krok  $5 \cdot 10^{-5}$  s, u kterého by pro výpočet 1 s jízdy byl nutný čas 100 hodin. Proto byl jemnější krok použit pouze pro kratší časové úseky.

## 6.3. Výsledky

S tímto modelem byly provedeny čtyři studie. Tři z nich zkoumaly, jak se v kontaktu projeví opotřebení kontaktních povrchů. Byly zvoleny tato typická opotřebení: ploška na kole (může vzniknout zablokováním kola nebo dlouhým stáním), vlnité opotřebení kola (vzniká běžným provozem) a vlnité opotřebení kolejnice (vzniká běžným provozem v místech, kde kolejová vozidla často zrychlují nebo brzdí, a na vnitřních kolejnicích oblouků). Čtvrtá studie zkoumala podmínky v obloucích, kde často vzniká opotřebení, a to zvlnění na vnitřní kolejnici a opotřebení profilu na vnější kolejnici oblouku.

Na příkladu plošky na kole byly zkoumány zejména průběhy kontaktních sil a projevy v kontaktních plochách (normálový kontaktní tlak, tečné třecí napětí, skluz a třecí výkon). Tyto výsledky odhalily, že u plošky dochází ke ztrátě kontaktu mezi kolem a kolejnicí. Setrvačností se dvojkolí otáčí dál a při opětovném dosednutí kola do kontaktu dochází k nárazu, které mnohonásobně zvyšuje zatížení v kontaktu. Dále bylo zjišťováno ovlivnění zbytku vozidla poškozeným dvojkolím. Zjištěné ovlivnění zbytku vozidla nebylo nijak významné, nicméně například šíření hluku použitý model nezahrnuje. Dále byly vyhodnoceny závislost zatížení v kontaktu na hloubce opotřebení a význam hloubky opotřebení, šířky plošky a rychlosti vozidla na zatížení. Nejvýznamnějším parametrem je hloubka opotřebení, oproti tomu šířka plošky nemá zásadní vliv na zatížení v kontaktu. V závislosti na hloubce opotřebení je zatížení rostoucí. Růst normálové síly a normálového kontaktního tlaku se s hlubším opotřebením postupně snižuje, naopak třecí výkon u hlubších opotřebení narůstá lineárně. Celkově je možné říct, že čím větší hloubka opotřebení, tím tvrdší náraz kola a tím rychlejší poškozování povrchu kola i kolejnice.

Zvlnění po obvodu kola vytváří harmonické buzení. Byly u něj zaznamenány dva režimy zatěžování. V prvním ještě nerovnosti nejsou příliš velké a síly a projevy v kontaktu mají také harmonický charakter, nebo jsou mírně deformovány kvůli nelinearitám. U hlubších nerovností už vznikají po obvodu plošky a chování v kontaktu připomíná chování u vozidla s ploškou s tím rozdílem, že u jedné plošky došlo k jednomu až dvěma nárazům a kolo se ustálilo, kdežto s výrazně zvlněným obvodem kolo poskakuje neustále. Při zkoumání vlivu jednotlivých parametrů měla na všechny projevy v kontaktu největší účinek hloubka nerovností. Rychlost vozidla se projevila hlavně na skluzu a třecím výkonu. Naopak počet vln po obvodu kola měl ve zvoleném intervalu (7 až 17 vln) jen malý vliv na zatížení. Jako naprosto zásadní se ukázal podle hloubky nerovností režim, v jakém se kolo může pohybovat. Pokud je kolo zvlněné, ale stále ještě zaoblené, dochází jen k buzení harmonických kmitů s frekvencí odpovídající otáčkám dvojkolí a amplitudou podle hloubky nerovností, s případnou krátkodobou ztrátou kontaktu, pokud dochází k úplnému odlehčení. Pokud už ale zvlnění vytváří na povrchu kola plošky, vznikají nárazy, které povrch kola a kolejnice zatěžují mnohonásobně více.

Zvlnění na kolejnici působí podobně jako mírné zvlnění po obvodu kola. Vytváří harmonické buzení, jen s vyšší frekvencí. I u vln na kolejnici existuje varianta s rázovým zatížením. Dochází k němu, když jsou vlny na kolejnicích natolik krátké a natolik vysoké, že zakřivení prohlubni má menší poloměr než je poloměr kola. Takové zvlnění může vzniknout například pokud opotřebení kolejnic způsobují hlavně projíždějící vagóny. Lokomotivy mají větší průměr kol, takže u nich může docházet ke kontaktu na vrcholcích dvou sousedících vln, ale ne v prohlubni mezi nimi. Při převalení z jednoho vrcholku vln na následující dochází k částečnému nárazu, který ale nemá tak výrazné

účinky jako u zploštění kola. Při srovnání vlivu parametrů nerovností a rychlosti vozidla má nejvýznamnější účinek amplituda nerovností, naopak rychlost vozidla (alespoň v rozmezí 10 m/s až 30 m/s) není podstatná. To proto, že nerovnosti jsou natolik krátké, že i při rychlosti 10 m/s a délce vln 20 cm vzniká buzení o frekvenci 50 Hz, což už nelze považovat za pozvolné kmitání.

Poslední studie se nezabývala projevy nerovností, ale naopak příčinami jejich vzniku. V obloucích s malým poloměrem se na tratích objevuje typické opotřebení se zvlněním vnitřní kolejnice a opotřebením profilu vnější kolejnice. Studie jízdy vozidla v oblouku hledala zatížení, které by odpovídalo tomuto opotřebení. Kvalitativně toto opotřebení bylo nalezeno. Při simulaci průjezdu obloukem o poloměru 300 m bylo zjištěno rozkmitání předních dvojkolí podvozků vozidla o frekvenci 90 Hz s velmi vysokým zatížením na vnitřní hraně vnější kolejnice a mírnějším kmitajícím zatížením na vnitřní kolejnici. Toto kmitání vzniká kvůli tomu, že kolo na vnitřní kolejnici jede po kratší dráze než kolo na vnější kolejnici a dvojkolí se udržuje v požadovaném směru opakovaným přibrzdováním vnitřního kola. Tato zatížení vytvoří takové opotřebení, které bylo na kolejnicích opravdu nalezeno. Na kolejnicích byly ovšem nalezeny vlny o délce asi 8 cm, kdežto simulace naznačovala vlny o délce 20 cm. Délku vln však ovlivňuje i tuhost podvozku a uložení dvojkolí a kolejnic, které v této práci nebyly zkoumány. Z možných parametrů byl vyhodnocen vliv rychlosti vozidla a poloměru oblouku, víc variant neumožnila vysoká časová náročnost výpočtu průjezdu obloukem. Závěry pak jsou tyto - poloměr oblouku ovlivní zejména charakter zatížení při jízdě. Průjezdy oblouky o poloměru 600 m a 1000 m byly mnohem klidnější než v případě oblouku o poloměru 300 m. Kmity vybuze u malého poloměru u větších poloměrů zmizí. Poloměr tedy ovlivňuje chování v kontaktu kvalitativně a může určovat režim zatěžování. Vliv rychlosti je spíše v intenzitě zatěžování. Čím vyšší rychlost, tím větší zátěž v kontaktu.

Uvedené studie chování s nerovnostmi ukázaly, že nejnebezpečnější nerovnosti, jaké lze najít v provozu kolejových vozidel, jsou plošky na kolech, protože vytvářejí rázové zatížení. Hledání příčiny vzniku nerovností v obloucích tratí odhalilo, že velký vliv na vznik zvlnění a opotřebení profilu má poloměr oblouku.

## 6.4. Směry dalšího výzkumu

Tato práce má velké možnosti, jak by se dala dále rozvíjet. Z pohledu ověření výpočtového modelu by bylo vhodné naladit model na zvolené vozidlo používané v železniční nebo tramvajové síti, a to s přesnějším a podrobnějším modelem vazeb mezi jednotlivými tělesy. Stejně tak parametry dynamiky trati nejsou nastaveny podle českých tratí, ale na základě článku švédských autorů [1].

Dále pro zpřesnění či zrychlení výpočtu se může použít jemnější nebo adaptabilní síť s využitím paralelního vyhodnocení. Pro zamezení problémům s výpočtem sil v kontaktech může být použito proměnné délky časového kroku.

Každá z již zmíněných studií může být rozšířena do dalších variant hodnot, zejména studie průjezdu obloukem byla omezena na pět základních možností. Dále by bylo možné provést studie průjezdu přechodnicovým obloukem, přes výhybku, brzdění či zrychlování, nebo vzájemné ovlivnění více vozů v soupravě.

V současné době je simulace vytvořena pouze ve formě zdrojového kódu. Pro snadnější

#### 6.4. *SMĚRY DALŠÍHO VÝZKUMU*

manipulaci by bylo vhodné vytvořit uživatelské rozhraní a generátor výsledků, případně animací chování vozidla, což jsou předpoklady pro možné použití nástroje v praxi.



# Literatura

- [1] ANDERSSON, C.; JOHANSSON, A.: Prediction of rail corrugation generated by three-dimensional wheel-rail interaction. *Wear* 257, 2004: str. 423–434.
- [2] ARNOLD, M.: The geometry of wheel-rail contact. In *Proceedings of the First Workshop on 'Dynamics of Wheel-Rail Systems'*, editace FRISCHMUTH, K., University of Rostock, Department of Mathematics, 1994.  
URL <http://sim.mathematik.uni-halle.de/~arnold/ps/papers/1994/A94c.ps>
- [3] ATLAS LOKOMOTIV: 363 — ES 499.1, (cit. 18. 9. 2011).  
URL <http://www.atlaslokomotiv.net/loko-363.html>
- [4] BAEZA, L.; RODA, A.; NIELSEN, J. C. O.: Railway vehicle/track interaction analysis using a modal substructuring approach. *Journal of Sound and Vibration* 293, 2006: str. 112–124.
- [5] BOGACZ, R.; KOWALSKA, Z.: Computer simulation of the interaction between a wheel and a corrugated rail. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2001: str. 673–684.
- [6] BUCHER, F.; KNOTHE, K.; THEILER, A.: Normal and tangential contact problem of surfaces with measured roughness. *Wear* 253, 2002: str. 204–218.
- [7] BUDINSKÝ, B.: *Analytická a diferenciální geometrie*. číslo 7 in Matematika pro vysoké školy technické, SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1983, 296 s.
- [8] COMISIÓN NACIONAL DE REGULACIÓN DEL TRANSPORTE: Perfiles de rieles, (cit. 2. 8. 2011).  
URL <http://www.cnrt.gov.ar/ultrasonido/GST%20%28V0%29%20022.jpg>
- [9] DAMME, S.: *Zur Finite-Element-Modellierung des stationären Rollkontakts von Rad und Schiene*. Dizertační práce, Technische Universität Dresden, 2006.
- [10] DAMME, S.; NACKENHORST, U.; WETZEL, A.; aj.: On the Numerical Analysis of the Wheel-Rail System in Rolling Contact. In *System Dynamics and Long-Term Behaviour of Railway Vehicles, Track and Subgrade*, editace POPP, K.; SCHIEHLEN, W. O., číslo 6 in Lecture Notes in Applied Mechanics, Springer-Verlag, 2003, ISBN 3-540-43892-0, s. 155–174.
- [11] DUKKIPATI, R. V.: *Vehicle Dynamics*. CRC Press, 2000, ISBN 0-8493-0976-X, 591 s.
- [12] FANPAGE-DER-WIENER-LINIEN: Rillenschiene Ri 60, (cit. 2. 8. 2011).  
URL <http://www.fpdwl.at/4images/data/media/112/Ri60.jpg>
- [13] GERLICI, J.; LACK, T.: Analýza vplyvu parametrov tlmičov a pružín na komfort jazdy. In *Dynamika tuhých a deformovateľných telies 2007, V. mezinárodní konference. Sborník příspěvků*, editace SKOČILASOVÁ, B., Fakulta výrobních technologií a managementu UJEP Ústí n. L., 2006, ISBN 80-7044-914-1, s. 39–48.

## LITERATURA

- [14] GRASSIE, S. L.: Rail corrugation: advances in measurement, understanding and treatment. *Wear* 258, 2005: str. 1224–1234.
- [15] GRASSIE, S. L.; ELKINS, J. A.: Tractive effort, curving and surface damage of rails, Part 1. Forces exerted on the rails. *Wear* 258, 2005: str. 1235–1244.
- [16] GRASSIE, S. L.; SAXON, M. J.; SMITH, J. D.: Measurement of longitudinal rail irregularities and criteria for acceptable grinding. *Journal of Sound and Vibration* 227, 1999: s. 949–964.
- [17] HEMPELMANN, K.; KNOTHE, K.: An extended linear model for the prediction of short pitch corrugation. *Wear* 191, 1996: s. 161–169.
- [18] HERTZ, H.: Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal reine und angewandte Mathematik* 92, 1882: s. 156–171.
- [19] HOU, K.; KALOUSEK, J.; DONG, R.: A dynamic model for an asymmetrical vehicle/track system. *Journal of Sound and Vibration* 267, 2003: str. 591–604.
- [20] IWNICKI, S. (editor): *Handbook of Railway Vehicle Dynamics*. CRC Press, 2006, ISBN 0-8493-3321-0, 534 s.
- [21] JACOBSON, B.; KALKER, J. J. (editoři): *Rolling Contact Phenomena*. číslo 411 in CISM Courses and Lectures, Springer-Verlag, 2000, ISBN 3-211-83332-3, 394 s.
- [22] JIN, X. S.; WEN, Z. F.: Effect of discrete track support by sleepers on rail corrugation at a curved track. *Journal of Sound and Vibration* 315, 2008: str. 279–300.
- [23] JIN, X. S.; WEN, Z. F.; WANG, K. Y.: Effect of track irregularities on initiation and evolution of rail corrugation. *Journal of Sound and Vibration* 285, 2005: str. 121–148.
- [24] JIN, X. S.; WEN, Z. F.; WANG, K. Y.; aj.: Effect of a scratch on curved rail on initiation and evolution of rail corrugation. *Tribology International* 37, 2004: str. 385–394.
- [25] JIN, X. S.; WEN, Z. F.; WANG, K. Y.; aj.: Effect of passenger car curving on rail corrugation at a curved track. *Wear* 260, 2006: str. 619–633.
- [26] JIN, X. S.; WEN, Z. F.; WANG, K. Y.; aj.: Three-dimensional train-track model for study of rail corrugation. *Journal of Sound and Vibration* 293, 2006: str. 830–855.
- [27] JIN, X. S.; WEN, Z. F.; ZHANG, W. H.; aj.: Numerical simulation of rail corrugation on a curved track. *Computers and Structures* 83, 2005: str. 2052–2065.
- [28] JIN, X. S.; WU, P. B.; WEN, Z. F.: Effects of structure elastic deformations of wheelset and track on creep forces of wheel/rail in rolling contact. *Wear* 253, 2002: str. 247–256.
- [29] JIN, X. S.; ZHANG, J. Y.: A complementary principle of elastic bodies of arbitrary geometry in rolling contact. *Computers and Structures* 79, 2001: str. 2635–2644.

- [30] JOHANSSON, A.: Out-of-round railway wheels — assessment of wheel tread irregularities in train traffic. *Journal of Sound and Vibration* 293, 2006: str. 795–806.
- [31] JOHANSSON, A.; NIELSEN, J. C. O.: Rail corrugation growth — Influence of powered wheelsets with wheel tread irregularities. *Wear* 262, 2007: s. 1296–1307.
- [32] JOHNSON, K. L.: *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 9 vydání, 2003, ISBN 0-521-34796-3, 451 s.
- [33] KALKER, J. J.: *Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*. číslo 2 in Solid Mechanics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, 1990, ISBN 0-7923-0712-7, 314 s.
- [34] KALKER, J. J.: *Rolling Contact Phenomena*, kapitola Rolling Contact Phenomena. číslo 411 in CISM Courses and Lectures, Springer-Verlag, 2000, s. 1–84.
- [35] KALKER, J. J.; PÉRIARD, F.: Wheel-rail noise: impact, random, corrugation and tonal noise. *Wear* 191, 1996: s. 184–187.
- [36] KALOUSEK, J.: Wheel/rail damage and its relationship to track curvature. *Wear* 258, 2005: str. 1330–1335.
- [37] KALOUSEK, J.; MAGEL, E.; STRASSER, J.; aj.: Tribological interrelationship of seasonal fluctuations of freight car wheel wear, contact fatigue shelling and composition brakeshoe consumption. *Wear* 191, 1996: s. 210–218.
- [38] KANEHARA, H.; FUJIOKA, T.: Measuring rail/wheel contact points of running railway vehicles. *Wear* 253, 2002: str. 275–283.
- [39] KATEDRA ŽELEZNIČNÍCH STAVEB FAKULTY STAVEBNÍ ČVUT: Stavby kolejové dopravy, (cit. 2. 8. 2011).  
URL <http://kzs.fsv.cvut.cz/>
- [40] KNOTHE, K.: *Rolling Contact Phenomena*, kapitola Non-Steady State Rolling Contact and Corrugations. číslo 411 in CISM Courses and Lectures, Springer-Verlag, 2000, s. 203–276.
- [41] KNOTHE, K.; WU, Y.: Receptance behaviour of railway track and subgrade. *Archive of Applied Mechanics* 68, 1998: str. 457–470.
- [42] KÜSSEL, M.; BROMMUNDT, E.: Wavy Wear Pattern on the Tread of Railway Wheels. In *System Dynamics and Long-Term Behaviour of Railway Vehicles, Track and Subgrade*, editace POPP, K.; SCHIEHLEN, W. O., číslo 6 in Lecture Notes in Applied Mechanics, Springer-Verlag, 2003, ISBN 3-540-43892-0, s. 121–132.
- [43] LACK, T.; GERLICI, J.: Analýza napětí v kontakte železničního kola a kořajnice. In *Dynamika tuhých a deformovatelných těles 2006, IV. mezinárodní konference. Sborník příspěvků*, editace SKOČILASOVÁ, B., Fakulta výrobních technologií a managementu UJEP Ústí n. L., 2006, ISBN 80-7044-782-6, s. 117–138.

## LITERATURA

- [44] LACK, T.; GERLICI, J.; HARUŠINEC, J.: Presný výpočet kontaktných napätí železničného kolesa a koľajnice. In *Dynamika tuhých a deformovateľných telies 2007, V. mezinárodná konferencia. Sborník príspevků*, editace SKOČILASOVÁ, B., Fakulta výrobních technológií a managementu UJEP Ústí n. L., 2006, ISBN 80-7044-914-1, s. 127–136.
- [45] LATA, M.: Základy dopravní techniky, (cit. 14. 11. 2007).  
URL [http://mail.upce.cz/%7Elata/dipct/ZDT\\_e-learning/ZDT\\_kap\\_0.htm](http://mail.upce.cz/%7Elata/dipct/ZDT_e-learning/ZDT_kap_0.htm)
- [46] LEI, X.; NODA, N.-A.: Analyses of dynamic response of vehicle and track coupling system with random irregularity of track vertical profile. *Journal of Sound and Vibration* 258, 2002: str. 147–165.
- [47] LEWIS, R.; CAVALLETTI, M.; DWYER-JOYCE, R. S.; aj.: Wheel wear predictions with ADAMS/Rail. In *Proceedings of the 1st MSC.ADAMS European User Conference*, 2002.  
URL [www.mssoftware.com/support/library/conf/adams/euro/2002/papers/033\\_EUC\\_019\\_Sheffield%20University.pdf](http://www.mssoftware.com/support/library/conf/adams/euro/2002/papers/033_EUC_019_Sheffield%20University.pdf)
- [48] MACE, S.; PENA, R.; WILSON, N.; aj.: Effects of wheel-rail contact geometry on wheel set steering forces. *Wear* 191, 1996: s. 204–209.
- [49] MAGEL, E. E.; KALOUSEK, J.: The application of contact mechanics to rail profile design and rail grinding. *Wear* 253, 2002: str. 308–316.
- [50] MAGEL, E. E.; KALOUSEK, J.; CALDWELL, R.: A numerical simulation of wheel wear. *Wear* 258, 2005: str. 1245–1254.
- [51] MATSUMOTO, A.; SATO, Y.; NAKATA, M.; aj.: Wheel-rail contact mechanics at full scale on the test stand. *Wear* 191, 1996: s. 101–106.
- [52] MATSUMOTO, A.; SATO, Y.; OHNO, H.; aj.: Improvement of bogie curving performance by using friction modifier to rail/wheel interface, Verification by full-scale rolling stand test. *Wear* 258, 2005: str. 1201–1208.
- [53] MATSUMOTO, A.; SATO, Y.; ONO, H.; aj.: Formation mechanism and countermeasures of rail corrugation on curved track. *Wear* 253, 2002: str. 178–184.
- [54] NIELSEN, J. C. O.; IGELAND, A.: Vertical dynamic interaction between train and track - influence of wheel and track imperfection. *Journal of Sound and Vibration* 187, 1995: s. 714–728.
- [55] ONDROVÁ, Z.; GERLICI, J.; LACK, T.: Analýza dynamických vlastností koľajového vozidla v pohybe. In *Dynamika tuhých a deformovateľných telies 2006, IV. mezinárodná konferencia. Sborník príspevků*, editace SKOČILASOVÁ, B., Fakulta výrobních technológií a managementu UJEP Ústí n. L., 2006, ISBN 80-7044-782-6, s. 155–162.
- [56] POLÁCH, O.: A Fast Wheel-Rail Forces Calculation Computer Code. *Vehicle System Dynamics Supplement* 33, 1999: s. 728–739.

- [57] POLÁCH, O.: Influence of locomotive tractive effort on the forces between wheel and rail. *Vehicle System Dynamics Supplement 35*, 2001: s. 7–22.
- [58] POLÁCH, O.: Creep forces in simulations of traction vehicles running on adhesion limit. *Wear 258*, 2005: str. 992–1000.
- [59] POMBO, J.; AMBRÓSIO, J.: A New Approach to Study the Wheel-Rail Contact Problem in Railway Dynamics, (cit. 10. 5. 2008).  
URL <http://www.dec.fct.unl.pt/projectos/TGV/pdf/a3.pdf>
- [60] SHEN, Z. Y.; HEDRICK, J. K.; ELKINS, J. A.: A comparison of alternative creep-force models for rail vehicle dynamic analysis. In *Proceedings of the 8th IAVSD Symposium*, Cambridge, MA, USA, 1983, s. 591–605.
- [61] SIEGL, J.; ŠVÍGLER, J.: The motion simulation of the railway vehicle bogie emphatically of creep force effects. In *Proceedings of Engineering Mechanics 2008 Conference*, editace FUIS, V.; PÁSEK, M., Institute of Thermomechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, 2008, ISBN 80-87012-11-6, s. 206–207, celý článek na přiloženém CD.
- [62] SUN, Y. Q.; DHANASEKAR, M.: A dynamic model for the vertical interaction of the rail track and wagon system. *International Journal of Solids and Structures 39*, 2002: str. 1337–1359.
- [63] TELLISKIVI, T.; OLOFSSON, U.; SELLGREN, U.; aj.: A tool and a method for FE analysis of wheel and rail interaction. In *Proceedings of ANSYS Conference, Pittsburgh, Pennsylvania, USA*, ANSYS Corp. Publishers, 2000.  
URL [www.md.kth.se/~ulfs/Publications/Pitt\\_5.pdf](http://www.md.kth.se/~ulfs/Publications/Pitt_5.pdf)
- [64] ŠVÍGLER, J.; SIEGL, J.: Contribution to modelling of contact between wheel set and curved railway. In *Proceedings of Engineering Mechanics 2007 Conference*, editace ZOLOTAREV, I., Institute of Thermomechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, 2007, ISBN 80-87012-06-2, s. 285–286, celý článek na přiloženém CD.
- [65] ŠVÍGLER, J.; VIMMER, J.: Contribution to modelling of wheel-rail contact. In *Proceedings of Engineering Mechanics 2006 Conference*, editace NÁPRSTEK, J.; FISCHER, C., Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, 2006, ISBN 80-86246-27-2, s. 376–377, celý článek na přiloženém CD.
- [66] VLAK-SITE: Rekordy v České republice, (cit. 2. 8. 2011).  
URL [http://vlak.wz.cz/zelrekord\\_cr.html](http://vlak.wz.cz/zelrekord_cr.html)
- [67] WIKIPEDIA.ORG: Linear multistep method, (cit. 10. 5. 2008).  
URL [http://en.wikipedia.org/wiki/Linear\\_multistep\\_method](http://en.wikipedia.org/wiki/Linear_multistep_method)
- [68] WIKIPEDIA.ORG: Lokomotiva 363, (cit. 18. 9. 2011).  
URL [http://cs.wikipedia.org/wiki/Lokomotiva\\_363](http://cs.wikipedia.org/wiki/Lokomotiva_363)

- [69] WIKIPEDIA.ORG: Flat spot, (cit. 2. 8. 2011).  
URL [http://en.wikipedia.org/wiki/Flat\\_spot](http://en.wikipedia.org/wiki/Flat_spot)
- [70] WIKIPEDIA.ORG: Rozchod kolejí, (cit. 2. 8. 2011).  
URL [http://cs.wikipedia.org/wiki/Rozchod\\_kolej%C3%AD](http://cs.wikipedia.org/wiki/Rozchod_kolej%C3%AD)
- [71] ZASTRAU, B.; DAMME, S.: Numerische Analyse der Beanspruchung von Rad und Schiene beim Rollkontakt unter Anwendung einer ALE-Formulierung. In *Tagungsband der 5. Internationalen Schienenfahrzeugtagung Rad 2002 Dresden*, Tetzlaff Verlag, Hamburg, 2002.  
URL [imf.tu-dresden.de/publikationen/pdf/zastrau02.pdf](http://imf.tu-dresden.de/publikationen/pdf/zastrau02.pdf)

# Seznam použitých symbolů

Veličina	Jednotka	Popis
$A$	$\text{m}^2$	Plocha průřezu kolejnice
$a_{ce}, b_{ce}$	$\text{m}$	Délky hlavních poloos kontaktní elipsy
$A_{fs}$	$\text{m}$	Hloubka opotřebení u plošky na kole
$A_{IiJj}$	$\text{m}/\text{Pa}$	Matice vzájemného vlivu prvků (algoritmus CONTACT)
$A_{ww}$	$\text{m}$	Hloubka vlnového opotřebení kola
$A_w$	$\text{m}$	Amplituda zvlnění kolejnice
$A, B$	$\text{m}$	Náhradní hlavní křivosti povrchů v kontaktu
$B$	–	Označení lokálního souřadného systému podvozku
$b$	–	Index veličin podvozku
$B_{fs}$	$1/\text{rad}^2$	Parametr určující šířku zploštění kola
$B_{IiJj}$	$\text{m}/\text{Pa}$	Matice vlivu prvků v předchozím časovém kroce (algoritmus CONTACT)
$B_{iJj}$	$\text{m}/\text{Pa}$	Funkce vzájemného vlivu prvků (algoritmus CONTACT)
$b_{s,x}$	$\text{kg}/\text{s}$	Tlumení uchycení pražce v příčném směru
$b_{u,x}$	$\text{kg}/\text{s}$	Tlumení uchycení kolejnice v příčném směru
$b_{u,z}$	$\text{kg}/\text{s}$	Tlumení uchycení kolejnice ve svislém směru
$b_\varphi$	$\text{Nms}/\text{rad}$	Tlumení uchycení kolejnice v krutu
$b_b$	$\text{kg}/\text{s}$	Tlumení svislé vazby mezi pražcem a podloží
$b_c$	$\text{kg}/\text{s}$	Tlumení vazby mezi dvěma sousedními náhradními hmotami podloží v podélném směru
$b_g$	$\text{kg}/\text{s}$	Tlumení vazby mezi náhradní hmotou podloží trati a základnou
$C$	množina	Oblast kontaktní plochy (algoritmus CONTACT)
$C_{11}, C_{22}, C_{23}, C_{32}, C_{33}$	–	Kalkerovy skluzové koeficienty
$c_{I,1}, c_{I,2}, c_{I\tau}$	$\text{m}/\text{s}$	Relativní rychlost (algoritmy FASTSIM a CONTACT)
$C_{jj}$	–	Sdružený Kalkerův koeficient
$C_v$	$\text{kg}/\text{m}$	Koeficient odporu vzduchu
$\cos t$	–	Axiální funkce
$d_{cs}$	$\text{m}$	Vzdálnost povrchů v kontaktu
$dS_I$	$\text{m}^2$	Plocha prvku (algoritmy FASTSIM a CONTACT)
$dt$	$\text{s}$	Časový krok
$dx, dy$	$\text{m}$	Polovina velikosti prvku (algoritmus CONTACT)
$E$	množina	Oblast vně kontaktu (algoritmus CONTACT)
$E$	$\text{Pa}$	Modul pružnosti kolejnice v konečnoprvkovém modelu
$e_I$	$\text{m}$	Vzdálenost deformovaných povrchů prvku (algoritmus CONTACT)
$f$	–	Součinitel smykového tření

$f_{m,j}(\dot{\varphi}_j)$	Nm	Funkce hnacího momentu
$f_{st}(\mathbf{y}, t)$	různé	Stavová funkce
$F_o$	N	Odstředivá síla
$F_t$	N	Třecí síla
$g$	m/s <sup>2</sup>	Tíhové zrychlení
$G$	N	Tíhová síla
$G$	Pa	Kombinovaný modul pružnosti ve smyku
$G$	–	Označení globálního souřadného systému
$G^{(1)}, G^{(2)}$	Pa	Modul pružnosti ve smyku částí v kontaktu
$g_I$	Pa	Vazba adheze (algoritmus FASTSIM)
$h$	m	Penetrace nedeformovaných povrchů
$H$	množina	Oblast adheze (algoritmus CONTACT)
$h_I$	m	Penetrace nedeformovaných povrchů na prvku
$h_I^*$	m	Penetrace nedeformovaných povrchů na prvku se započtením vlivu tečných smykových napětí
$i$	–	Číslování podvozků
$I_{s,y}$	kgm <sup>2</sup>	Moment setrvačnosti pražce
$I, J$	–	Indexy prvků (algoritmus CONTACT)
$i, j$	–	Indexy souřadnic (algoritmus CONTACT)
$j$	–	Číslování dvojkolí
$J_p$	m <sup>4</sup>	Polární kvadratický moment průřezu kolejničky
$J_x, J_z$	m <sup>4</sup>	Osové kvadratické momenty průřezu kolejničky
$K$	–	Koeficient rozdílnosti materiálových vlastností částí v kontaktu
$k$	–	Číslování pružin primárního odpružení
$k_{s,x}$	N/m	Tuhost uchycení pražce v příčném směru
$k_{u,x}$	N/m	Tuhost uchycení kolejničky v příčném směru
$k_{u,z}$	N/m	Tuhost uchycení kolejničky v svislém směru
$k_\varphi$	Nm/rad	Tuhost uchycení kolejničky v krutu
$k_b$	N/m	Tuhost svislé vazby mezi pražcem a podloží
$k_c$	N/m	Tuhost vazby mezi dvěma sousedními náhradními hmotami podloží v podélném směru
$k_e$	–	Poměr druhých mocnin poloos kontaktní elipsy
$k_g$	N/m	Tuhost vazby mezi náhradní hmotou podloží trati a základnou
$l$	m	Parametr délky v rovnicích přechodnice
$L$	m/N	Celková tečná poddajnost prvku (algoritmus FASTSIM)
$l$	–	Číslování pružin sekundárního odpružení
$L$	m	Délka prvku kolejničky
$L_1$	m/N	Podélná tečná poddajnost prvku (algoritmus FASTSIM)
$L_2$	m/N	Příčná tečná poddajnost prvku (algoritmus FASTSIM)



$L_3$	m/N	Spinová tečná poddajnost prvku (algoritmus FASTSIM)
$L_d$	m	Délka trati použitá pro konečnoprvkovou síť
$L_k$	m	Korekce rozchodu kolejnice
$L_K$	m	Délka přechodnice
$L_n$	m	Délka vybočení kolejnice
$L_p$	m	Vzdálenost mezi pražci
$L_r$	m	Rozchod kolejnic
$L_s$	m	Vzdálenost styčných kružnice
$L_w$	m	Vlnová délka zvlnění kolejnice
$m$	kg	Hmotnost
$m$	–	Excentricita kontaktní elipsy
$m_{b,i}$	kg	Hmotnost podvozku
$M_{k_y}$	Nm	Kroutící moment na uzel v konečnoprvkovém modelu kolejnice
$M_{o,x}, M_{o,z}$	Nm	Ohybové momenty na uzel v konečnoprvkovém modelu kolejnice
$m_s$	kg	Hmotnost pražce
$m_{w,j}$	kg	Hmotnost dvojkolí
$m_v$	kg	Hmotnost vozidla
$M_z$	N	Spinový moment
$N$	N	Normálová síla
$N$	m	Funkce tvaru kolejnice
$N_{emp}$	–	Počet prvků na úseku mezi dvěma pražci v konečnoprvkovém modelu kolejnice
$N_{id}$	m	Funkce tvaru neporušené kolejnice
$N_{ner}$	m	Funkce nerovností nebo opotřebení kolejnice
$N_{us}$	–	Počet úseků mezi pražci v konečnoprvkovém modelu kolejnice
$N_{ww}$	–	Počet vln po obvodu kola
$N_m$	m	Velikost vybočení kolejnice
$N_n$	m	Funkce nerovností kolejnice
$N_p$	–	Počet pražců v konečnoprvkovém modelu kolejnice
$N_y$	N	Normálová síla na uzel v konečnoprvkovém modelu kolejnice
$P$	–	Označení primárního odpružení
$p_{I\tau,max}$	Pa	Maximální tečné třecí napětí
$p_{I\tau}, p_{J\tau}$	Pa	Tečné třecí napětí na prvek (algoritmy FASTSIM a CONTACT)
$p_{I\tau}^H$	Pa	Tečné smykové napětí v oblasti adheze (algoritmy FASTSIM a CONTACT)
$p_{I\tau}^S$	Pa	Tečné smykové napětí v oblasti skluzu (algoritmy FASTSIM a CONTACT)

$p_{I3,max}$	Pa	Maximální normálový kontaktní tlak (algoritmy FASTSIM a CONTACT)
$p_{I3}, p_{J3}$	Pa	Normálový kontaktní tlak na prvek (algoritmy FASTSIM a CONTACT)
$p_{Ii}, p_{Jj}$	Pa	Kontaktní tlak na prvek (algoritmus CONTACT)
$p_{max}$	Pa	Maximální normálový kontaktní tlak
$p_v$	m	Převýšení kolejnice
$p_z$	Pa	Normálový kontaktní tlak
$Q$	množina	Oblast hraničněprvkové sítě (algoritmus CONTACT)
$R$	m	Poloměr oblouku
$R$	m	Funkce tvaru kola
$R_x^{(1)}, R_y^{(1)}, R_x^{(2)}, R_y^{(2)}$	m	Poloměry zakřivení v povrchů v kontaktu
$R_{id}$	m	Funkce tvaru neporušeného kola
$R_{ner}$	m	Funkce nerovností nebo opotřebení kola
$R_0$	m	Poloměr nepoškozeného kola
$R_n$	m	Funkce nerovností kola
$S$	množina	Oblast skluzu (algoritmus CONTACT)
$S$	–	Označení sekundárního odpružení
$s_{I,max}$	m/s	Maximální skluz
$s_{I\tau}$	m/s	Skutečný skluz (algoritmy FASTSIM a CONTACT)
$S_I$	m/s	Velikost skutečného skluzu prvku (algoritmy FASTSIM a CONTACT)
$t$	s	Čas
$T_{y,p}$	N	Složka tečné síly v příčném směru způsobená příčným skluzem
$T_{y,s}$	N	Vliv spinu na příčnou složku tečné síly
$t_c$	s	Časový krok pro výpočet kontaktních sil a kmitání kolejnič
$t_d$	s	Časový krok pro výpočet pohybu těles vozidla
$T_x$	N	Podélná tečná síla
$\bar{T}$	N	Saturovaná tečná síla
$\bar{T}_x, \bar{T}_y$	N	Složky saturované tečné síly
$T_x, T_z$	N	Posouvající síly na uzel v konečnoprvkovém modelu kolejnice
$T_y$	N	Příčná tečná síla
$u_{I3}$	m	Normálový posuv prvku
$u_{Ii}$	m	Posuvy prvku
$u_x^L$	m	Příčná výchylka levé kolejnice
$u_x^P$	m	Příčná výchylka pravé kolejnice
$u_z^L$	m	Svislá výchylka levé kolejnice
$u_z^P$	m	Svislá výchylka pravé kolejnice
$u_x, u_y, u_z$	m	Posuvy uzlu konečnoprvkového modelu kolejnice

$v$	m/s	Rychlost
$V$	m/s	Rychlost valení
$V$	—	Označení lokálního souřadného systému vozidla
$v$	—	Index veličin vozidla
$v_{rel,x}, v_{rel,y}$	m/s	Složky relativní rychlosti v kontaktu
$W$	—	Označení lokálního souřadného systému dvojkolí
$w$	—	Index veličin dvojkolí
$w_{If,max}$	W/m <sup>2</sup>	Maximální třecí výkon v kontaktu
$w'$	—	Součinitel saturace tečné síly
$x_{rt}$	m	Příčná souřadnice těžiště průřezu nezatížené kolejnice
$x_s$	m	Příčná výchylka pražce
$x_d$	m	Axiální poloha bodu v cylindrickém souřadném systému dvojkolí
$x_I, y_I$	m	Poloha prvku (algoritmy FASTSIM a CONTACT)
$x_k, y_k, z_k$	m	Souřadnice bodu na kole
$x_n, y_n, z_n$	m	Souřadnice bodu na normále k povrchu kolejnice
$x_r$	m	Příčná poloha na povrchu kolejnice
$x, y, z$	m	Souřadnice
$y_r$	m	Podélná poloha na povrchu kolejnice
$z_{b,i}^L$	m	Výchylka levé náhradní hmoty podloží trati pod i-tým pražcem
$z_{b,i}^P$	m	Výchylka pravé náhradní hmoty podloží trati pod i-tým pražcem
$z_{rt}$	m	Svislá souřadnice těžiště průřezu nezatížené kolejnice
$z_s$	m	Svislá výchylka pražce
$\alpha$	rad	Koeficient vnějšího konstrukčního proporcionálního tlumení
$\alpha_{dr}$	rad	Směr půdorysu trati, Eulerův úhel rotace kolem osy Z v transformaci Z-X-Y
$\alpha_d$	rad	Souřadnice úhlu v cylindrickém souřadném systému dvojkolí
$\beta$	rad	Koeficient vnitřního materiálového proporcionálního tlumení
$\beta_{dr}$	rad	Sklon trati, Eulerův úhel rotace kolem osy X v transformaci Z-X-Y
$\Gamma_{dr}$	—	Trajektorie trati
$\gamma_{dr}$	rad	Klopení trati, Eulerův úhel rotace kolem osy Y v transformaci Z-X-Y
$\lambda$	m	Vzdálenost podél trajektorie trati
$\lambda_j$	m	Poloha dvojkolí podél trajektorie trati
$\mu$	—	Kombinovaný Poissonův poměr
$\mu^{(1)}, \mu^{(2)}$	—	Poissonův poměr částí v kontaktu

$\omega$	rad	Úhel natočení z hlavního souřadného systému kolejnice do hlavního souřadného systému kola
$\omega_3$	—	Relativní úhlová rychlost v kontaktu kolem osy kolmé na kontaktní plochu
$\omega_w$	rad	Úhel natočení z hlavního souřadného systému povrchu kola do společného hlavního souřadného systému kontaktní dvojice
$\omega_r$	rad	Úhel natočení z hlavního souřadného systému povrchu kolejnice do společného hlavního souřadného systému kontaktní dvojice
$\psi$	rad	Bočení, Eulerův úhel kolem osy Z pro postupné rotace Z-Y-X
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	Hustota materiálu kolejnice
$\rho_d$	m	Radiální souřadnice v cylindrickém souřadném systému dvojkolí
$\theta$	rad	Klopení, Eulerův úhel kolem osy Y pro postupné rotace Z-Y-X
$\theta_{ul}$	rad	Úhel uložení kolejnice (obvykle uložení 1:20 nebo 1:40)
$v_{y,c}$	—	Relativní příčný skluz s vlivem spinu
$v_c$	—	Celkový relativní skluz
$v_x$	—	Relativní podélný skluz
$v_y$	—	Relativní příčný skluz
$\varepsilon_{val}$	rad	Úhel směru valení
$\varepsilon_p$	—	Gradient růstu tečného zatížení v oblasti adheze
$\varepsilon_s$	—	Gradient tečného zatížení v důsledku spinu
$\varphi$	rad	Klonění, Eulerův úhel kolem osy X pro postupné rotace Z-Y-X
$\varphi_{s,y}$	rad	Rotace pražce
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	rad	Rotace uzlu konečnoprvkového modelu kolejnice
$\varphi_y^L$	rad	Úhel zkroucení levé kolejnice
$\varphi_y^P$	rad	Úhel zkroucení pravé kolejnice
$\varphi_z$	1/m	Relativní spinový skluz
$\mathbf{A}_{p,b}$	—	Vektor příslušnosti prvků primárního odpružení k podvozkům
$\mathbf{A}_{p,w}$	—	Vektor příslušnosti prvků primárního odpružení ke dvojkolí
$\mathbf{A}_{s,b}$	—	Vektor příslušnosti prvků sekundárního odpružení k podvozkům
$\mathbf{A}_{s,v}$	—	Vektor příslušnosti prvků sekundárního odpružení k vozidlům
$\mathbf{B}_{dyn}$	N/m, Nm/rad	Dynamická matice tlumení metody konečných prvků, implicitní integrační metody
$\mathbf{B}_p$	kg/s	Matice tlumení tlumičů primárního odpružení
$\mathbf{B}_s$	kg/s	Matice tlumení tlumičů sekundárního odpružení

$\mathbf{B}_e$	kg/s, Nms/rad	Matice tlumení prvku kolejnice
$\mathbf{C}$	—	Diagonální matice hlavních křivostí plochy
$\mathbf{C}_{BG,i}$	—	Transformační matice z lokálního souřadného systému podvozku do globálního souřadného systému
$\mathbf{C}_{LG}$	—	Matice transformace z lokálního souřadného systému trati do globálního souřadného systému
$\mathbf{C}_{PG,k}$	—	Transformační matice z lokálního souřadného systému primárního odpružení do globálního souřadného systému
$\mathbf{C}_s$	—	Matice společných hlavních křivostí
$\mathbf{C}_{SG,l}$	—	Transformační matice z lokálního souřadného systému dvojkolí do globálního souřadného systému
$\mathbf{C}_{VG}$	—	Transformační matice z lokálního souřadného systému vozidla do globálního souřadného systému
$\mathbf{C}_{WG,j}$	—	Transformační matice z lokálního souřadného systému dvojkolí do globálního souřadného systému
$\mathbf{C}_{WL,j}$	—	Matice transformace ze souřadného systému dvojkolí do lokálního souřadného systému trati
$\mathbf{C}_k$	—	Matice hlavních křivostí povrchu kola
$\mathbf{C}_r$	—	Matice hlavních křivostí povrchu kolejnice
$\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{K}$	—	Úplné eliptické integrály
$\mathbf{E}_{ss,\tau}$	—	Tečné vektory k povrchu kolejnice
$\mathbf{E}_{ss,I}$	—	Matice transformace ze souřadného systému daného prvku algoritmu CONTACT do lokálního souřadného systému trati
$\mathbf{E}_{ss}$	—	Matice transformace ze souřadného systému jednoho prvku algoritmu CONTACT do lokálního souřadného systému trati
$\mathbf{F}_{0,p}$	N	Vektor síly předepnutí pružin primárního odpružení
$\mathbf{F}_{0,s}$	N	Vektor síly předepnutí pružin sekundárního odpružení
$\mathbf{F}_{Bp,k}^G$	N	Vektor sil tlumiče primárního odpružení v globálním souřadném systému
$\mathbf{F}_{Bp,k}^P$	N	Vektor sil tlumiče primárního odpružení v souřadném systému primárního odpružení
$\mathbf{F}_{Bs,l}^G$	N	Vektor sil tlumiče sekundárního odpružení v globálním souřadném systému
$\mathbf{F}_{Bs,l}^S$	N	Vektor sil tlumiče sekundárního odpružení v souřadném systému sekundárního odpružení
$\mathbf{F}_{cnt,j}^G$	N	Vektor kontaktních sil na dvojkolí v globálním souřadném systému
$\mathbf{F}_{cnt,j}^W$	N	Vektor kontaktních sil v souřadném systému dvojkolí
$\mathbf{F}_{gb,i}^G$	N	Vektor tíhové síly podvozku v globálním souřadném systému
$\mathbf{F}_{gv}^G$	N	Vektor tíhové síly vozidla v globálním souřadném systému

$\mathbf{F}_{gw,j}^G$	N	Vektor tíhové síly dvojkolí v globálním souřadném systému
$\mathbf{F}_{kon,C}^W$	N	Součet sil v kontaktu, stanoveny metodou CONTACT
$\mathbf{F}_{kon}$	N	Síla v kontaktu
$\mathbf{F}_{kon}^W, \mathbf{F}_{kon,L}^W, \mathbf{F}_{kon,P}^W$	N	Síly v kontaktu transformované do souřadného systému dvojkolí
$\mathbf{F}_{Kp,k}^G$	N	Vektor sil pružiny primárního odpružení v globálním souřadném systému
$\mathbf{F}_{Kp,k}^P$	N	Vektor sil pružiny primárního odpružení v souřadném systému primárního odpružení
$\mathbf{F}_{Ks,l}^G$	N	Vektor sil pružiny sekundárního odpružení v globálním souřadném systému
$\mathbf{F}_{Ks,l}^S$	N	Vektor sil pružiny sekundárního odpružení v souřadném systému sekundárního odpružení
$\mathbf{F}_{ov}^G$	N	Vektor síly odporu vzduchu v globálním souřadném systému
$\mathbf{F}_{r,C}$	N	Kontaktní síla na kolejnici stanovená metodou CONTACT
$\mathbf{F}_r$	N	Kontaktní síla na kolejnici
$\mathbf{F}_n$	N, Nm	Vektor sil a momentů na uzel konečnoprvkového modelu kolejnice
$\mathbf{g}$	m/s <sup>2</sup>	Vektor tíhového zrychlení
$\mathbf{G}$	—	První základní forma plochy
$\mathbf{G}_k$	—	První základní forma povrchu kola
$\mathbf{G}_r$	—	První základní forma povrchu kolejnice
$\mathbf{H}$	—	Druhá základní forma plochy
$\mathbf{H}_{ss,k}$	—	Matice hlavního souřadného systému povrchu kola
$\mathbf{H}_{ss,r}$	—	Matice hlavního souřadného systému povrchu kolejnice
$\mathbf{H}_{ss}$	—	Matice společného hlavního souřadného systému kontaktní dvojice
$\mathbf{H}_k$	—	Druhá základní forma povrchu kola
$\mathbf{H}_r$	—	Druhá základní forma povrchu kolejnice
$\mathbf{J}_{b,i}$	kgm <sup>2</sup>	Matice momentů setrvačnosti podvozku
$\mathbf{J}_{w,j}$	kgm <sup>2</sup>	Matice momentů setrvačnosti dvojkolí
$\mathbf{J}_v$	kgm <sup>2</sup>	Matice momentů setrvačnosti vozidla
$\mathbf{K}_{dyn}$	N/m, Nm/rad	Dynamická matice tuhosti metody konečných prvků, implicitní integrační metody
$\mathbf{K}_p$	N/m	Matice tuhosti pružin primárního odpružení
$\mathbf{K}_s$	N/m	Matice tuhosti pružin sekundárního odpružení
$\mathbf{K}_e$	N/m, Nm/rad	Matice tuhosti prvku kolejnice
$\mathbf{M}_{cnt,j}^G$	Nm	Moment kontaktních sil na dvojkolí v globálním souřadném systému

$\mathbf{M}_{cnt,j}^W$	Nm	Součet momentů v kontaktu a momentů sil v kontaktu vzhledem k těžišti dvojkolí v souřadném systému dvojkolí
$\mathbf{M}_{dyn}$	N/m, Nm/rad	Dynamická matice hmotnosti metody konečných prvků, implicitní integrační metody
$\mathbf{M}_{h,j}^G$	Nm	Vektor hnacího momentu na dvojkolí
$\mathbf{M}_{kon,C}^W$	Nm	Součet momentů v kontaktu stanovená metodou CONTACT
$\mathbf{M}_{kon}$	Nm	Moment v kontaktu
$\mathbf{M}_{kon}^W, \mathbf{M}_{kon,L}^W, \mathbf{M}_{kon,P}^W$	Nm	Momenty v kontaktu transformované do souřadného systému dvojkolí
$\mathbf{M}_{r,C}$	Nm	Kontaktní moment na kolejnici stanovený metodou CONTACT
$\mathbf{M}_r$	Nm	Kontaktní moment na kolejnici
$\mathbf{M}_e$	kg, kgm <sup>2</sup>	Matice hmotnosti prvku kolejnice
$\mathbf{n}_k$	—	Normálový vektor k povrchu kola
$\mathbf{n}_r$	—	Normálový vektor k povrchu kolejnice
$\mathbf{p}_I$	Pa	Vektor tlaků v kontaktu v daném prvku (normálové i tečné složky)
$\mathbf{Q}$	N, Nm	Vektor sil metody konečných prvků
$\mathbf{Q}_{dyn}$	N, Nm	Dynamický vektor sil metody konečných prvků, implicitní integrační metody
$\mathbf{t}_{d1}, \mathbf{t}_{d2}$	—	Netransformované tečné vektory k povrchu kola
$\mathbf{t}_{dr}$	m	Tečný vektor trajektorie trati
$\mathbf{t}_{hk1}, \mathbf{t}_{hk2}$	—	Hlavní tečné vektory povrchu kola
$\mathbf{t}_{hr1}, \mathbf{t}_{hr2}$	—	Hlavní tečné vektory povrchu kolejnice
$\mathbf{T}_k, \mathbf{T}_{k,2D}, \mathbf{T}_{r,2D}$	—	Transformační matice pro rotace z hlavních souřadných systémů povrchu kola nebo kolejnice do společného hlavního souřadného systému kontaktní dvojice
$\mathbf{t}_{k1}, \mathbf{t}_{k2}$	—	Tečné vektory k povrchu kola
$\mathbf{t}_{r1}, \mathbf{t}_{r2}$	—	Tečné vektory k povrchu kolejnice
$\mathbf{T}_{val}$	—	Matice rotace ze společného hlavního souřadného systému kontaktní dvojice do směru rychlosti valení
$\mathbf{u}$	—	Vlastní vektory plochy (určují hlavní tečné vektory plochy)
$\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k1}, \mathbf{u}_{k2}$	—	Vlastní vektory povrchu kola
$\mathbf{u}_n$	m, rad	Vektor posuvů a rotací uzlu konečnoprvkového modelu kolejnice
$\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r1}, \mathbf{u}_{r2}$	—	Vlastní vektory povrchu kolejnice
$\mathbf{v}_{val}$	m/s	Vektor rychlosti valení = průmět rychlosti dvojkolí do společného hlavního souřadného systému kontaktní dvojice
$\mathbf{x}_{0,p}$	m	Rovnovážná poloha primárního odpružení
$\mathbf{x}_{0,s}$	m	Rovnovážná poloha sekundárního odpružení

$\mathbf{x}_{b,i}^G$	m, rad	Vektor polohy těžiště podvozku v globálním souřadném systému
$\mathbf{x}_{dr}$	m	Poloha bodu trajektorie trati
$\mathbf{x}_k$	m	Poloha bodu na kole
$\mathbf{x}_n$	m	Poloha bodu na normále k povrchu kolejnice
$\mathbf{x}_{pb,k}^B$	m	Poloha uchycení primárního odpružení na podvozku v souřadném systému podvozku
$\mathbf{x}_{pb,k}^G$	m	Poloha uchycení primárního odpružení na podvozku v globálním souřadném systému
$\mathbf{x}_{pw,k}^G$	m	Poloha uchycení primárního odpružení na dvojkolí v globálním souřadném systému
$\mathbf{x}_{pw,k}^W$	m	Poloha uchycení primárního odpružení na dvojkolí v souřadném systému dvojkolí
$\mathbf{x}_{r,l}$	m	Poloha bodu na kolejnici
$\mathbf{x}_r$	m	Poloha bodu na povrchu kolejnice v lokálním souřadném systému trati
$\mathbf{x}_{sb,l}^B$	m	Poloha uchycení sekundárního odpružení na podvozku v souřadném systému podvozku
$\mathbf{x}_{sb,l}^G$	m	Poloha uchycení sekundárního odpružení na podvozku v globálním souřadném systému
$\mathbf{x}_{sv,l}^G$	m	Poloha uchycení sekundárního odpružení na vozidle v globálním souřadném systému
$\mathbf{x}_{sv,l}^V$	m	Poloha uchycení sekundárního odpružení na vozidle v souřadném systému vozidla
$\mathbf{x}_v^G$	m, rad	Vektor polohy těžiště vozidla v globálním souřadném systému
$\mathbf{x}_{w,j}^G$	m, rad	Vektor polohy těžiště dvojkolí v globálním souřadném systému
$\mathbf{x}_{w,j}^L$	m	Poloha těžiště dvojkolí v lokálním souřadném systému kolejnice
$\mathbf{x}_d$	m	Poloha bodu na povrchu dvojkolí v Kartézském souřadném systému dvojkolí
$\mathbf{y}_n$	různé	Stavový vektor
$\boldsymbol{\alpha}_b^G$	rad/s <sup>2</sup>	Vektor úhlového zrychlení podvozku v globálním souřadném systému
$\boldsymbol{\alpha}_v^G$	rad/s <sup>2</sup>	Vektor úhlového zrychlení vozidla v globálním souřadném systému
$\boldsymbol{\alpha}_w^G$	rad/s <sup>2</sup>	Vektor úhlového zrychlení dvojkolí v globálním souřadném systému
$\boldsymbol{\Omega}_{WL,j}, \boldsymbol{\omega}_{WL,j}$	rad/s	Matice/vektor rotace dvojkolí v lokálním souřadném systému trati
$\boldsymbol{\omega}_{kon}$	rad/s	Vektor rotace dvojkolí ve společném hlavním souřadném systému kontaktní dvojice



# Přílohy



## A. Funkce atan2

Funkce atan2 počítá úhel při převodu z Kartézských souřadnic na polární. Průvodič bodu daného dvěma Kartézskými souřadnicemi  $x$  a  $y$  zde svírá s osou X úhel  $\varphi$ , který se stanoví funkcí:

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0 \wedge y = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x = 0 \wedge y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{pro } x = 0 \wedge y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{pro } x > 0 \wedge y \geq 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{pro } x < 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{pro } x > 0 \wedge y < 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Takto se převedou souřadnice  $x$  a  $y$  na úhel v intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$ .

Někdy je výhodnější získat úhel v intervalu  $\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \rangle$ . Pak se tato funkce změní pro případ  $x > 0 \wedge y < 0$ :

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0 \wedge y = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x = 0 \wedge y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{pro } x = 0 \wedge y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{pro } x > 0 \wedge y \geq 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{pro } x < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{pro } x > 0 \wedge y < 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$



## B. Transformace souřadnic

### Postupné rotace Z-Y-X

#### Transformace souřadnic

Transformační matice pro převod z lokálního souřadného systému L, spojenému s pohybujícím se tělesem do nepohyblivého globálního souřadného systému G se stanoví s pomocí tří úhlů:  $\psi$  - rotace kolem osy Z,  $\theta$  - rotace kolem osy Y a  $\varphi$  - rotace kolem osy X.

Transformační matice:

$$\mathbf{C}_{LG,1} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{C}_{LG,2} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{C}_{LG,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Matice celkové transformace vznikne násobením

$$\mathbf{C}_{LG} = \mathbf{C}_{LG,1} \mathbf{C}_{LG,2} \mathbf{C}_{LG,3} \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{C}_{LG} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\sin \psi \cos \theta - \cos \psi \sin \theta \sin \varphi & \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta - \sin \psi \sin \theta \sin \varphi & -\cos \psi \sin \theta - \sin \psi \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta & \cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Po transpozici této matice je zpětná transformace

$$\mathbf{C}_{GL} = \mathbf{C}_{LG}^T = \mathbf{C}_{LG,3}^T \mathbf{C}_{LG,2}^T \mathbf{C}_{LG,1}^T \quad (\text{B.6})$$

#### První derivace

Derivace jednoduché transformace podle času je

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{\Omega} \mathbf{C} \quad (\text{B.7})$$

kde  $\mathbf{\Omega}$  je antisymetrická matice úhlové rychlosti.

První derivace matice  $\mathbf{C}_{LG}$  se pak stanoví

$$\mathbf{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi} & 0 \\ \dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{\Omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

$$\mathbf{\Omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\varphi} \\ 0 & \dot{\varphi} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$\dot{\mathbf{C}}_{LG} = \dot{\mathbf{C}}_{LG,1}\mathbf{C}_{LG,2}\mathbf{C}_{LG,3} + \mathbf{C}_{LG,1}\dot{\mathbf{C}}_{LG,2}\mathbf{C}_{LG,3} + \mathbf{C}_{LG,1}\mathbf{C}_{LG,2}\dot{\mathbf{C}}_{LG,3} \quad (\text{B.11})$$

$$\dot{\mathbf{C}}_{LG} = \boldsymbol{\Omega}_1\mathbf{C}_{LG,1}\mathbf{C}_{LG,2}\mathbf{C}_{LG,3} + \mathbf{C}_{LG,1}\boldsymbol{\Omega}_2\mathbf{C}_{LG,2}\mathbf{C}_{LG,3} + \mathbf{C}_{LG,1}\mathbf{C}_{LG,2}\boldsymbol{\Omega}_3\mathbf{C}_{LG,3} \quad (\text{B.12})$$

Matice úhlové rychlosti v nepohyblivém souřadném systému je

$$\boldsymbol{\Omega}_G = \dot{\mathbf{C}}_{LG}\mathbf{C}_{LG}^T \quad (\text{B.13})$$

a v souřadném systému pohybujícího se tělesa

$$\boldsymbol{\Omega}_L = \mathbf{C}_{LG}^T\dot{\mathbf{C}}_{LG} \quad (\text{B.14})$$

Asymetrickou matici úhlové rychlosti lze zapsat i pomocí vektoru úhlové rychlosti

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Po vynásobení a úpravě jsou vektory úhlové rychlosti

$$\omega_G = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \cos \psi \cos \theta \\ -\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \cos \theta \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \sin \theta \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

$$\omega_L = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \sin \theta + \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi - \dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

Transformace mezi souřadnými systémy jsou

$$\vec{\omega}_G = \mathbf{C}_{LG}\vec{\omega}_L \quad (\text{B.19})$$

$$\vec{\omega}_L = \mathbf{C}_{LG}^T\vec{\omega}_G \quad (\text{B.20})$$

$$\boldsymbol{\Omega}_G = \mathbf{C}_{LG}\boldsymbol{\Omega}_L\mathbf{C}_{LG}^T \quad (\text{B.21})$$

$$\boldsymbol{\Omega}_L = \mathbf{C}_{LG}^T\boldsymbol{\Omega}_G\mathbf{C}_{LG} \quad (\text{B.22})$$

## Druhá derivace

Druhá derivace jednoduché transformace vznikne dalším derivováním rovnice B.7

$$\ddot{\mathbf{C}} = \mathbf{A}\mathbf{C} + \boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{C} \quad (\text{B.23})$$

Pro složenou transformaci to je

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\ddot{\psi} & 0 \\ \ddot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\ddot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \ddot{\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.25})$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\ddot{\varphi} \\ 0 & \ddot{\varphi} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.26})$$

## B. TRANSFORMACE SOUŘADNIC

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{C}}_{LG} = & \ddot{\mathbf{C}}_{LG,1}\mathbf{C}_{LG,2}\mathbf{C}_{LG,3} + \mathbf{C}_{LG,1}\ddot{\mathbf{C}}_{LG,2}\mathbf{C}_{LG,3} + \mathbf{C}_{LG,1}\mathbf{C}_{LG,2}\ddot{\mathbf{C}}_{LG,3} \\ & + 2\dot{\mathbf{C}}_{LG,1}\dot{\mathbf{C}}_{LG,2}\mathbf{C}_{LG,3} + 2\dot{\mathbf{C}}_{LG,1}\mathbf{C}_{LG,2}\dot{\mathbf{C}}_{LG,3} + 2\mathbf{C}_{LG,1}\dot{\mathbf{C}}_{LG,2}\dot{\mathbf{C}}_{LG,3}\end{aligned}\quad (\text{B.27})$$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{C}}_{LG} = & \mathbf{A}_1\mathbf{C}_{LG,1}\mathbf{C}_{LG,2}\mathbf{C}_{LG,3} + \mathbf{C}_{LG,1}\mathbf{A}_2\mathbf{C}_{LG,2}\mathbf{C}_{LG,3} + \mathbf{C}_{LG,1}\mathbf{C}_{LG,2}\mathbf{A}_3\mathbf{C}_{LG,3} \\ & + \Omega_1^2\mathbf{C}_{LG,1}\mathbf{C}_{LG,2}\mathbf{C}_{LG,3} + \mathbf{C}_{LG,1}\Omega_2^2\mathbf{C}_{LG,2}\mathbf{C}_{LG,3} + \mathbf{C}_{LG,1}\mathbf{C}_{LG,2}\Omega_3^2\mathbf{C}_{LG,3} \\ & + 2\Omega_1\mathbf{C}_{LG,1}\Omega_2\mathbf{C}_{LG,2}\mathbf{C}_{LG,3} + 2\Omega_1\mathbf{C}_{LG,1}\Omega_2\mathbf{C}_{LG,2}\Omega_3\mathbf{C}_{LG,3} \\ & + 2\mathbf{C}_{LG,1}\mathbf{C}_{LG,2}\Omega_3\mathbf{C}_{LG,3}\end{aligned}\quad (\text{B.28})$$

Úhlové zrychlení v nepohyblivém souřadném systému je

$$\mathbf{A}_G = \ddot{\mathbf{C}}_{LG}\mathbf{C}_{LG}^T - \Omega_G^2 \quad (\text{B.29})$$

a v souřadném systému pohybujícího se tělesa

$$\mathbf{A}_L = \mathbf{C}_{LG}^T\ddot{\mathbf{C}}_{LG} - \Omega_L^2 \quad (\text{B.30})$$

Antisymetrická matice a vektor úhlového zrychlení jsou podobně jako u úhlového zrychlení

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_z & \alpha_y \\ \alpha_z & 0 & -\alpha_x \\ -\alpha_y & \alpha_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.31})$$

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} \quad (\text{B.32})$$

Po vynásobení a úpravě jsou vektory úhlová zrychlení

$$\alpha_G = \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \sin \psi + \ddot{\varphi} \cos \psi \cos \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \psi - \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \psi \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta \\ -\ddot{\theta} \cos \psi + \ddot{\varphi} \sin \psi \cos \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \psi + \dot{\psi} \dot{\varphi} \cos \psi \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta \\ \ddot{\psi} + \ddot{\varphi} \sin \theta + \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{B.33})$$

$$\alpha_L = \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \sin \theta + \ddot{\varphi} + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\psi} \cos \theta \sin \varphi - \ddot{\theta} \cos \varphi - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\psi} \dot{\varphi} \cos \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \ddot{\psi} \cos \theta \cos \varphi + \ddot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\psi} \dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (\text{B.34})$$

Transformace mezi souřadnými systémy jsou

$$\vec{\alpha}_G = \mathbf{C}_{LG}\vec{\alpha}_L \quad (\text{B.35})$$

$$\vec{\alpha}_L = \mathbf{C}_{LG}^T\vec{\alpha}_G \quad (\text{B.36})$$

$$\mathbf{A}_G = \mathbf{C}_{LG}\mathbf{A}_L\mathbf{C}_{LG}^T \quad (\text{B.37})$$

$$\mathbf{A}_L = \mathbf{C}_{LG}^T\mathbf{A}_G\mathbf{C}_{LG} \quad (\text{B.38})$$

## Zpětné transformace

Velikosti úhlů  $\psi$ ,  $\theta$  a  $\varphi$  se ze matice transformace  $\mathbf{C}_{LG}$  určí ze vzorců

$$\theta = \arcsin(\mathbf{C}_{LG}[3, 1]) \quad (\text{B.39})$$

$$\psi = \text{atan2}\left(\frac{\mathbf{C}_{LG}[1, 1]}{\cos \theta}, \frac{\mathbf{C}_{LG}[2, 1]}{\cos \theta}\right) \quad (\text{B.40})$$

$$\varphi = \text{atan2}\left(\frac{\mathbf{C}_{LG}[3, 3]}{\cos \theta}, \frac{\mathbf{C}_{LG}[3, 2]}{\cos \theta}\right) \quad (\text{B.41})$$

První derivace z úhlových rychlostí nepohyblivého souřadného systému jsou

$$\dot{\psi} = -\omega_{G,x} \cos \psi \tan \theta - \omega_{G,y} \sin \psi \tan \theta + \omega_{G,z} \quad (\text{B.42})$$

$$\dot{\theta} = \omega_{G,x} \sin \psi - \omega_{G,y} \cos \psi \quad (\text{B.43})$$

$$\dot{\varphi} = \omega_{G,x} \frac{\cos \psi}{\cos \theta} + \omega_{G,y} \frac{\sin \psi}{\cos \theta} \quad (\text{B.44})$$

Totéž z úhlových rychlostí souřadného systému pohybujícího se tělesa

$$\dot{\psi} = \omega_{L,y} \frac{\sin \varphi}{\cos \theta} + \omega_{L,z} \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} \quad (\text{B.45})$$

$$\dot{\theta} = -\omega_{L,y} \cos \varphi + \omega_{L,z} \sin \varphi \quad (\text{B.46})$$

$$\dot{\varphi} = \omega_{L,x} - \omega_{L,y} \tan \theta \sin \varphi - \omega_{L,z} \tan \theta \cos \varphi \quad (\text{B.47})$$

Druhé derivace z úhlových zrychlení v nepohyblivém souřadném systému jsou

$$\ddot{\psi} = -\alpha_{G,x} \cos \psi \tan \theta - \alpha_{G,y} \sin \psi \tan \theta + \alpha_{G,z} + \dot{\psi} \dot{\theta} \tan \theta - \frac{\dot{\theta} \dot{\varphi}}{\cos \theta} \quad (\text{B.48})$$

$$\ddot{\theta} = \alpha_{G,x} \sin \psi - \alpha_{G,y} \cos \psi + \dot{\psi} \dot{\varphi} \cos \theta \quad (\text{B.49})$$

$$\ddot{\varphi} = \alpha_{G,x} \frac{\cos \psi}{\cos \theta} + \alpha_{G,y} \frac{\sin \psi}{\cos \theta} - \frac{\dot{\psi} \dot{\theta}}{\cos \theta} + \dot{\theta} \dot{\varphi} \tan \theta \quad (\text{B.50})$$

A nakonec druhé derivace z úhlových zrychlení v souřadném systému tělesa v pohybu

$$\ddot{\psi} = \alpha_{L,y} \frac{\sin \varphi}{\cos \theta} + \alpha_{L,z} \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} + \dot{\psi} \dot{\theta} \tan \theta - \frac{\dot{\theta} \dot{\varphi}}{\cos \theta} \quad (\text{B.51})$$

$$\ddot{\theta} = -\alpha_{L,y} \cos \varphi + \alpha_{L,z} \sin \varphi + \dot{\psi} \dot{\varphi} \cos \theta \quad (\text{B.52})$$

$$\ddot{\varphi} = \alpha_{L,x} - \alpha_{L,y} \tan \theta \sin \varphi - \alpha_{L,z} \tan \theta \cos \varphi - \frac{\dot{\psi} \dot{\theta}}{\cos \theta} + \dot{\theta} \dot{\varphi} \tan \theta \quad (\text{B.53})$$